

SÉRIE A, N° 1807

N° D'ORDRE :

2673

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Maurice COTTE

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR L'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **2 JUIN 1938** devant la Commission d'examen.

MM. DE BROGLIE..... *Président.*

PAUTHENIER... }
CHRÉTIEN..... } *Examineurs.*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT GERMAIN

1938

SÉRIE A, N° 1807

N° D'ORDRE :

2673

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Maurice COTTE

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR L'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **Juin 1938** devant la Commission d'examen.

MM. DE BROGLIE..... *Président.*

PAUTHENIER... } *Examinateurs.*

CHRÉTIEN..... }

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

—
1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.
Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires.</i>	H. LEBESGUE. A. FERNBACH. Émile PICARD. Léon BRILLOUIN. GUILLET. PÉCHARD. FREUNDLER. AUGER.	BLAISE. DANGEARD. LESPIEAU. MARCHIS. VESSIOT. PORTIER. MOLLIARD. LAPICQUE.	G. BERTRAND ABRAHAM. Ch. FABRY. Léon BERTRAND. WINTREBERT. DUBOSQ. BOHN.
--------------------------------	--	---	--

PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	† Zoologie (Évolution des êtres organisés).	H. BÉGHIN.....	† Mécanique physique et expérimentale.
G. URBAIN.....	† Chimie générale.	Foch.....	Mécanique expérimentale des fluides.
Émile BOREL.....	† Calcul des probabilités et Physique mathématique.	PAUTHENIER.....	Physique (P. C. B.).
Jean PERRIN.....	† Chimie physique.	De BROGLIE.....	† Théories physiques.
E. CARTAN.....	† Géométrie supérieure.	CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.
A. COTTON.....	† Recherches physiques.	P. JOB.....	Chimie générale.
J. DRACH.....	† Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LABROUSTE.....	Physique du Globe.
Charles PÉREZ....	† Zoologie.	PRENANT.....	† Anatomie et Histologie comparées.
E. RABAUD.....	† Biologie expérimentale.	VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.	COMBES.....	† Physiologie végétale.
Paul MONTEL.....	† Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	GARNIER.....	† Mathématiques générales.
L. BLARINGHEM..	† Botanique.	PÈRES.....	Mécan. théor. des fluides.
G. JULIA.....	† Mécanique analytique et Mécanique céleste.	HACKSPILL.....	Chimie (P. C. B.).
C. MAUGUIN.....	† Minéralogie.	LAUGIER.....	† Physiologie générale.
A. MICHEL-LÉVY..	† Pétrographie.	TOUSSAINT.....	Technique Aéronautique.
H. BÉNARD.....	† Mécanique expérimentale des fluides.	M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).
A. DENJOY.....	† Application de l'analyse à la Géométrie.	G. RIBAUD.....	† Hautes températures.
L. LUTAUD.....	† Géographie physique et géologie dynamique.	CHAZY.....	† Mécanique rationnelle.
Eugène BLOCH....	† Physique.	GAULT.....	Chimie (P. C. B.).
G. BRUHAT.....	† Physique.	CROZE.....	Recherches physiques.
E. DARMOIS.....	† Enseignement de Physique.	DUPONT.....	† Théories chimiques.
A. DEBIERNE.....	† Physique Générale et Radioactivité.	LANQUINE.....	† Géologie structurale et géologie appliquée.
A. DUFOUR.....	† Physique. (P. C. B.).	VALIRON.....	Mathématiques générales.
L. DUNOYER.....	Optique appliquée.	BARRABÉ.....	Géologie structurale et géologie appliquée.
A. GUILLIERMOND.	† Botanique.	MILLOT.....	Biologie animale (P. C. B.).
M. JAVILLIER.....	Chimie biologique.	F. PERRIN.....	Théories physiques.
ROBERT-LÉVY....	† Physiologie comparée.	VAVON.....	Chimie organique.
F. PICARD.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	G. DARMOIS.....	Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
Henri VILLAT....	† Mécanique des fluides et applications.	CHATTON.....	† Biologie maritime.
Ch. JACOB.....	† Géologie.	AUBEL.....	Chimie biologique.
P. PASCAL.....	† Chimie minérale.	Jacques BOURCART.	Géographie physique et géologie dynamique.
M. FRÉCHET.....	† Calcul différentiel et Calcul intégral.	M ^{me} JOLIOT-CURIE.	Physique générale et Radioactivité.
E. ESCLANGON....	† Astronomie.	PLANTEFOL.....	Biologie végétale (P. C. B.).
M ^{me} RAMART-LUCAS	† Chimie organique.	CABANNES.....	Enseignement de Physique.
		GRASSÉ.....	Biologie animale (P. C. B.).
		PRÉVOST.....	Chimie (P. C. B.).

Secrétaire..... A. PACAUD.
Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



A MES PARENTS

A MONSIEUR LOUIS DE BROGLIE

En témoignage de sincère reconnaissance.

RECHERCHES SUR L'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE

Par M. COTTE

INTRODUCTION

Ce travail comprend quelques recherches théoriques sur l'optique électronique. Cette partie de la physique a fait de rapides progrès depuis quelques années. Son développement a été inspiré et guidé par la synthèse qu'a donnée Hamilton de l'optique géométrique et de la mécanique analytique, et il s'est produit justement après que M. Louis de Broglie, par la découverte de la mécanique ondulatoire, en a eu montré la fécondité. Les résultats essentiels de l'optique électronique théorique ont été obtenus par Busch ⁽¹⁾, Scherzer ⁽²⁾ et Glaser ⁽³⁾ ⁽⁴⁾.

Depuis, de nombreux travaux, particulièrement à l'étranger, ont contribué au développement théorique et expérimental d'une branche de la physique dont les applications sont extrêmement nombreuses ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ H. BUSCH. *Physik Z.*, **23** (1922), 438 ; *Ann. Physik*, **81** (1926), 974 ; **28** (1937), 11.

⁽²⁾ O. SCHERZER. *Z. Physik*, **80** (1933), 193 ; **82** (1933), 697 ; **101** (1936), 593.

⁽³⁾ W. GLASER. *Z. Physik*, **80** (1933), 451 ; **81** (1933), 649 ; **83** (1933), 104 ; **97** (1935), 177 ; *Ann. Physik*, **18** (1933), 557.

⁽⁴⁾ P. FUNK et W. GLASER. *Z. Physik*, **102** (1936), 603.

⁽⁵⁾ On pourra se reporter aux ouvrages de E. BRÜCHE et O. SCHERZER *Geometrische Elektronenoptik*, Springer, Berlin (1934) ; BRÜCHE et HENNEBERG. *Geometrische Elektronenoptik* (Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaft, **15**, Springer (1936), 365-421) ; H. BUSCH et BRÜCHE. *Beiträge zur Elektronenoptik*. A. Barth, Leipzig (1937).

Nous nous sommes limités à l'étude des trajectoires des charges électrisées dans un champ électrique et magnétique permanent. Ces charges peuvent aussi bien être positives que négatives. Le nom d'optique ionique a été proposé pour l'étude du mouvement des charges positives; je pense qu'il n'est pas utile de créer une distinction qui n'existe pas dans les équations; et puisque le nom d'optique électronique a été préféré à celui d'optique corpusculaire, je pense qu'il convient de l'adopter, même lorsqu'on a affaire à des charges positives; le nom d'optique corpusculaire ne serait pas non plus, à l'abri de toute critique, puisque la lumière est formée de photons.

Dans ce travail, après avoir rappelé l'analogie entre le principe de Maupertuis et le principe de Fermat, j'ai comparé la forme des surfaces d'onde, des surfaces des indices, et des surfaces des vitesses normales de l'optique cristalline et de l'optique électronique.

Dans une deuxième partie, j'ai donné des formules générales pour la disposition d'un faisceau délié de trajectoires dans un champ quelconque, et j'ai montré comment, en première approximation, on pouvait ramener aux cas où le champ magnétique est nul, les autres cas.

Dans la troisième et la quatrième parties, j'ai étudié le cas où les champs présentent un plan de symétrie. Ce cas est intéressant pour la spectrographie de vitesse et de masse. J'ai donné des *équations générales* pour l'approximation de Gauss, la dispersion et les aberrations. J'ai examiné de façon systématique les trajectoires situées en dehors du plan de symétrie; ceci m'a permis de signaler des propriétés curieuses des régions où le champ magnétique varie rapidement, et d'attirer l'attention sur certaines aberrations, généralement négligées, dont il conviendrait de tenir compte pour déterminer la dimension la meilleure à donner aux diaphragmes.

Enfin, après avoir rappelé rapidement les propriétés des

systèmes centrés, j'ai étendu certains résultats que Scherzer a démontrés dans le cas non relativiste.

J'ai constamment supposé la densité de charge électrique négligeable ou connue *a priori* ; la façon dont elle est reliée à l'intensité du faisceau ne sera pas examinée ici ⁽¹⁾.

I. — Comparaison entre l'optique géométrique et l'optique électronique.

1. Le principe de Maupertuis-Fermat. — Considérons une particule de charge e , positive ou négative, de masse au repos m , mobile avec la vitesse v dans un champ électromagnétique permanent défini par le potentiel scalaire V et le potentiel vecteur $\vec{A}$. Les potentiels V et $\vec{A}$ indépendants du temps, sont mesurés ainsi que e en unités électromagnétiques. L'énergie de la particule :

$$(1) \quad W = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + eV$$

reste constante au cours du mouvement.

En tout point de l'espace, pour toute direction représentée par le vecteur unité $\vec{s}$, définissons la fonction des coordonnées et de la direction :

$$(2) \quad \mu = \frac{1}{c} \sqrt{(W - eV)^2 - m^2 c^4} + e(\vec{A} \cdot \vec{s}).$$

A toute courbe d'extrémités P_0, P_1 , on pourra associer l'intégrale curviligne :

$$(3) \quad J = \int_{P_0}^{P_1} \mu ds,$$

⁽¹⁾ J'ai entrepris sur ce sujet quelques recherches dont j'ai déjà publié une partie. M. COTTE. *Comptes Rendus*, 264 (1937), 1933.

calculée en représentant par $\vec{s}$ le vecteur unité tangent à la courbe, *orienté dans le sens de parcours* P_0P_1 . Tout arc de trajectoire d'énergie W , d'extrémités P_0, P_1 parcouru dans le sens P_0P_1 , est caractérisé par le principe de Maupertuis :

$$(4) \quad \delta J = \delta \int_{P_0}^{P_1} \mu ds = 0.$$

Ce principe découle du principe de variation de Hamilton quand on introduit la relation (1) dans l'intégrale de Hamilton (1).

La quantité :

$$(5) \quad \mu_0 = \frac{1}{c} \sqrt{(W - eV)^2 - m^2 c^4}$$

a une signification mécanique simple ; c'est la grandeur de la quantité de mouvement $mv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Si l'énergie W dépasse de peu l'énergie au repos, mc^2 , on a sensiblement :

$$(6) \quad \mu_0 = mv = \sqrt{2m(E - eV)}$$

en posant :

$$(7) \quad E = W - mc^2.$$

La quantité μ représente la projection sur la direction $\vec{s}$ du vecteur moment de Lagrange :

$$(8) \quad \vec{P} = m\vec{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + e\vec{A}.$$

Quand on change l'origine des potentiels électrostatiques, μ_0 , ne change pas, car W et eV augmentent de la même quantité. En revanche μ dépend du potentiel vecteur, qui n'est pas défini complètement par le champ magnétique.

(1) W. GLASER. *Z. Physik*, **80** (1933), 451.

Nous remarquerons que si nous ajoutons à $\vec{A}$ le gradient d'un scalaire U , le principe de Maupertuis nous redonne les mêmes trajectoires ; en effet, les intégrales

$$\int_{P_0}^P \mu ds \quad \text{et} \quad \int_{P_0}^{P_1} [\mu + e(\vec{s}, \vec{\text{grad}} U)] ds$$

prises entre extrémités fixes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ne diffèrent que de $U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0)$, c'est-à-dire d'une quantité indépendante du chemin d'intégration. Un champ magnétique $\vec{H}$ étant donné, nous profiterons de cette possibilité pour choisir parmi toutes les quantités $\vec{A}$ satisfaisant à :

$$(9) \quad \text{rot } \vec{A} = \vec{H}$$

une de celles dont la forme est la plus simple.

Le principe de Maupertuis présente une analogie évidente avec le principe de Fermat de l'optique géométrique. La quantité μ est comparable à l'indice d'un milieu anisotrope ; pour que l'analogie soit plus complète, il convient de diviser μ par le produit mc de la masse d'un corpuscule élémentaire par la vitesse de la lumière ; μ sera dans ce cas un nombre sans dimension, qui, pour les vitesses faibles et les corpuscules de masse m , se réduira au rapport $\beta = \frac{v}{c}$, en absence de potentiel vecteur ; l'intégrale de Maupertuis J , aura la dimension d'une longueur, et sera comparable à un chemin optique.

De même qu'en optique l'indice varie avec la couleur, ici μ varie avec la masse et l'énergie des corpuscules. Aux rayons monochromatiques correspondent en optique électronique les trajectoires de corpuscules de même espèce doués d'une même énergie. A moins d'avis contraire, cette restriction, nécessaire pour que, dans des potentiels bien définis, μ soit une fonction bien définie des coordonnées et de la direction, sera à la base de nos raisonnements.

En optique électronique, le principe analogue au retour inverse de la lumière n'est vrai qu'en l'absence de champ magnétique. Ainsi qu'on peut s'en convaincre sur l'exemple simple d'un champ magnétique uniforme, deux corpuscules identiques, passant par un même point avec des vitesses égales et opposées, possèdent deux trajectoires différentes. Toute trajectoire est donc liée à un sens de parcours. Quand nous étudierons une famille de trajectoires, le sens de parcours pourra se déduire d'une trajectoire à l'autre par continuité.

2. Les surfaces d'onde de l'optique électronique. — Marquons sur toutes les trajectoires issues d'un point O que nous pouvons prendre pour origine, un point P tel que l'intégrale de Maupertuis calculée de O à P soit une constante l .

La surface lieu de P est l'analogue d'une onde de l'optique. Faisons tendre l vers O. La trajectoire tend vers l'élément d'arc ds de projections dx, dy, dz . L'équation de l'onde limite sera en coordonnées rectangulaires :

$$(10) \quad \mu_0 \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + e(A_x dx + A_y dy + A_z dz) = dl$$

en désignant par dl le chemin optique infiniment petit. Cette surface tend vers l'origine quand dl tend vers O, mais la limite de sa forme reste parfaitement définie. Prenons, en effet, l'homothétique dans le rapport $(dl)^{-1}$, ce qu'on obtient en remplaçant dans l'équation (10) dx par $X = \frac{dx}{dl}$, etc.; il vient :

$$(11) \quad \mu_0 \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} + e(A_x X + A_y Y + A_z Z) = 1.$$

Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs du potentiel vecteur $\vec{A}$; posons :

$$(12) \quad A_x = A\alpha, A_y = A\beta, A_z = A\gamma, A = |\vec{A}|$$

et substituons dans (10); il vient :

$$(13) \quad \frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z - \frac{1}{eA}} = -\frac{eA}{\mu_0}.$$

On reconnaît là l'équation d'une quadrique de révolution dont le foyer est l'origine, et le plan directeur un plan perpendiculaire au potentiel vecteur. C'est une sphère si $A = 0$, un ellipsoïde si $|eA| < \mu_0$, un parabolôïde si $|eA| = \mu_0$, un hyperboloïde si $|eA| > \mu_0$.

Cette quadrique est l'analogue en optique électronique de la surface d'onde de l'optique cristalline. On peut définir aussi 1° une surface des vitesses normales, qui est la podaire de la surface d'onde; 2° une surface des indices normaux, qui est l'inverse de la précédente. En optique électronique, ces deux surfaces sont des sphères.

L'ellipsoïde des indices, et l'ellipsoïde de Fresnel (ou ellipsoïde des vitesses radiales), qui jouent en optique cristalline un rôle important n'ont pas ici d'analogues.

La surface d'onde, la surface des vitesses normales et la surface des indices normaux de l'optique électronique ont une forme beaucoup plus simple que les surfaces correspondantes de l'optique ordinaire; contrairement à ces dernières, elles n'admettent pas l'origine pour centre de symétrie. On pourrait les comparer à ce point de vue aux surfaces d'onde dans un milieu optique isotrope en mouvement (1).

Il faut d'ailleurs bien remarquer :

1° Que les milieux de l'optique électronique sont des milieux dispersifs. Le rayon vecteur en un point de la surface d'onde n'a pas de rapport simple avec la vitesse de propagation de l'énergie. Le lieu des points atteints après le temps infiniment petit dt par les corpuscules issus de O est une sphère de centre O et de rayon $\beta c dt = v dt$;

(1) Ph. FRANK. *Z. Physik*, **80** (1933), 4.

2° Que la forme même de la surface d'onde ne serait univoquement déterminée, que si, comme le pense M. Louis de Broglie ⁽¹⁾, on doit normer de façon absolue les potentiels. La quantité μ ne possède pas l'invariance de jauge. Si on choisit arbitrairement la valeur de A en un point, la surface d'onde en ce point peut avoir ou non des points à l'infini.

3. Equations différentielles des trajectoires. — Représentons les trajectoires en coordonnées cartésiennes x, y, z par les équations :

$$(14) \quad x = x(z) \quad y = y(z)$$

Soient A_x, A_y, A_z les composantes du potentiel vecteur. Posons :

$$(15) \quad x' = \frac{dx}{dz} \quad y' = \frac{dy}{dz}$$

$$(16) \quad \mu ds = L(z, x, y, x', y') dz.$$

L est la fonction de Lagrange pour les trajectoires :

$$(17) \quad L = \mu_0(x, y, z) \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} + e(A_x x' + A_y y' + A_z).$$

Les équations différentielles des trajectoires sont :

$$(18) \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Ces équations sont du deuxième ordre.

Leur intégration introduit quatre constantes arbitraires. La trajectoire qui, en un point donné, a une tangente de direction donnée, ou la trajectoire assujettie à passer par deux points donnés suffisamment rapprochés sera, en principe, univoquement déterminée.

⁽¹⁾ Louis de BROGLIE. Nouvelles recherches sur la lumière. *Actualités scientifiques et industrielles*, 441, Hermann (1936).

II. — Le problème de la détermination des trajectoires voisines d'une trajectoire donnée, et l'approximation de Gauss.

1. Choix du système de coordonnées. — Le problème de l'intégration des équations (18) n'est en général soluble pratiquement qu'à partir de données initiales numériques; lorsqu'on a ainsi déterminé une trajectoire particulière $\mathbf{C}$, ce qui pour certaines données numériques est souvent très facile, l'étude des trajectoires qui lui sont infiniment voisines peut être ramenée à des problèmes plus simples dont la solution fournit des renseignements approximatifs sur le problème général.

Nous utiliserons un système de coordonnées curvilignes x, y, z dans lequel la trajectoire $\mathbf{C}$ aura l'équation :

$$x = 0, \quad y = 0$$

et nous regarderons pour les trajectoires voisines les fonctions $x(z), y(z)$ et leurs dérivées comme des infiniment petits du premier ordre.

Dans notre système de coordonnées, nous donnerons à l'élément d'arc la forme aussi simple que possible.

$$(19) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + f^2 dz^2$$

avec :

$$f = 1 - \theta(z)x - \omega(z)y.$$

Cela est possible de la façon suivante :

Soit $\vec{M} = \vec{M}(z)$ un vecteur dont l'origine est fixe, et dont l'extrémité est le point de $\mathbf{C}$ défini par l'abscisse curviligne z . Désignons par $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ les vecteurs unités du trièdre de Frénet-Serret au point M . Repérons un point P du plan $\vec{n}, \vec{b}$ par la

distance $MP = \rho$, et par l'angle de $\vec{MP}$ et de $\vec{n}$. Ceci s'écrit vectoriellement :

$$(20) \quad \vec{P} = \vec{M} + \rho \cos \varphi \cdot \vec{n} + \rho \sin \varphi \cdot \vec{b}.$$

Différentions, en tenant compte des formules de Frénet-Serret :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} d\vec{P} = & \vec{t} dz + \left[\rho \cos \varphi \left(-\frac{\vec{t}}{R} - \frac{\vec{b}}{T} \right) + \rho \sin \varphi \frac{\vec{n}}{T} \right] dz \\ & + (d\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi d\varphi) \vec{n} + (d\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi) \vec{b}. \end{aligned} \right.$$

$R(z)$ et $T(z)$ désignent le rayon de courbure et le rayon de torsion au point M. Le carré scalaire de $d\vec{P}$ est précisément le carré de l'élément de longueur ds dans le système de coordonnées, ρ, φ, z .

$$(22) \quad ds^2 = dz^2 \left\{ \left(1 - \frac{\rho}{R} \cos \varphi \right)^2 + \frac{\rho^2}{T^2} \right\} + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 - \frac{2\rho^2}{T} dz d\varphi.$$

Ce système de coordonnées n'est donc pas triple orthogonal; mais, si nous faisons le changement de variable :

$$(23) \quad \rho = \psi + \int \frac{dz}{T(z)} = \psi + \gamma(z)$$

le système de coordonnées ρ, ψ, z sera triple orthogonal, car :

$$(24) \quad ds^2 = dz^2 \left[1 - \frac{\rho}{R} \cos(\psi + \gamma) \right]^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2.$$

Les lignes de coordonnées $\psi = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ engendrent une surface développable⁽¹⁾. Inversement si on associe des normales à $\mathbf{C}$ de façon à former une surface développable, elles auront pour équation $z = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$

Dans le plan $z = \text{const.}$ un nouveau changement des coor-

⁽¹⁾ R. JULIA. *Éléments de géométrie infinitésimale*, 134. Equation 121.

données permet de passer des coordonnées polaires ρ, ψ aux coordonnées cartésiennes :

$$(25) \quad x = \rho \cos \psi \quad y = \rho \sin \psi.$$

Le système x, y, z est aussi triple orthogonal, car :

$$(26) \quad ds^2 = dz^2 \left[1 - \frac{\cos \gamma(z)}{R(z)} x + \frac{\sin \gamma(z)}{T(z)} y \right]^2 + dx^2 + dy^2.$$

L'élément d'arc prend bien la forme (19) en posant :

$$(27) \quad \theta(z) = \frac{\cos \gamma(z)}{R(z)} \quad \omega(z) = - \frac{\sin \gamma(z)}{T(z)}.$$

Les surfaces de coordonnées $y=0$ et $x=0$ sont des surfaces développables.

Pour une courbe plane $\frac{1}{T}=0$. Nous pourrions prendre pour surface de coordonnée $y=0$ le plan, de la courbe, et l'élément d'arc s'écrira :

$$(28) \quad ds^2 = dz^2(1 - \theta x)^2 + dx^2 + dy^2.$$

$\theta(z)$ sera la courbure au point z de C ; θ sera positif si l'axe des x est dirigé vers le centre de courbure, négatif dans le cas contraire.

2. Représentation des grandeurs électromagnétiques. — Nous représenterons le potentiel électrique par la fonction $V(x, y, z)$ que nous développerons selon les puissances de x et y :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} V(x, y, z) = V_0(z) + b_1 x + b_2 y + b_{11} \frac{x^2}{2} + b_{12} xy \\ \quad + b_{22} \frac{y^2}{2} + b_{111} \frac{x^3}{6} + b_{112} \frac{x^2}{2} y + b_{122} x \frac{y^2}{2} + b_{222} \frac{y^3}{6} + \dots \end{array} \right.$$

Les b_1, b_2 , etc., sont des fonctions de z .

En chaque point x, y, z de l'espace, nous prendrons un trièdre de coordonnées cartésiennes dont les trois axes

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ seront tangents aux lignes de coordonnées curvilignes. Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point x, y, z aura sur ces axes des projections :

$$(30) \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{1}{f} \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Si on exprime la densité de charge électrique au point x, y, z sous la forme :

$$(31) \quad \rho(x, y, z) = \rho_0(z) + \rho_1(z)x + \rho_2(z)y + \dots$$

il y a entre les coefficients V_0, ρ_i et b les relations qui expriment :

$$(32) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi c^2 \rho$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -4\pi c^2 \rho f.$$

Le champ magnétique $\vec{H}$ sera représenté, soit par les composantes covariantes A_{yz}, A_{zx}, A_{xy} d'un tenseur antisymétrique de second rang, soit par ses projections H_x, H_y, H_z sur les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ au point x, y, z .

$$(34) \quad H_x = \frac{1}{f} A_{yz}; H_y = \frac{1}{f} A_{zx}; H_z = A_{xy}.$$

Nous poserons :

$$(35) \quad \begin{cases} A_{yz} = h_0 + h_1 x + h_2 y + h_{11} \frac{x^2}{2} + h_{12} xy + h_{22} \frac{y^2}{2} + \dots \\ A_{zx} = k_0 + k_1 x + k_2 y + k_{11} \frac{x^2}{2} + k_{12} xy + k_{22} \frac{y^2}{2} + \dots \\ A_{xy} = l_0 + l_1 x + l_2 y + l_{11} \frac{x^2}{2} + l_{12} xy + l_{22} \frac{y^2}{2} + \dots \end{cases}$$

Les h, k, l sont des fonctions de z : elles ne sont pas indépendantes, car il y a entre elles les relations qui expriment :

$$(36) \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(37) \quad \frac{\partial A_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial z} = 0$$

et :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} (f A_{xy}) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f} A_{zx} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f} A_{yz} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (f A_{xy}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{f} A_{zx} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f} A_{yz} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} f H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} f H_z = 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1 + k_2 + l'_0 = 0 \\ l_2 - l_0 \omega = k'_0 \\ l_1 - l_0 \theta = h'_0 \\ k_1 + k_0 \theta = h_2 + h_0 \omega \end{array} \right.$$

et d'autres relations, que nous écrirons plus tard dans un cas particulier.

Le potentiel vecteur sera représenté par un tenseur de rang 1, de composantes covariantes A_x, A_y, A_z . Nous le définirons comme la solution des équations :

$$(40) \quad A_{yz} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad A_{zx} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad A_{xy} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

qui satisfait aux conditions :

$$(41) \quad A_y(x, y, z) = 0, \quad A_x(x, 0, z) = 0.$$

Ces conditions sont compatibles ⁽¹⁾ et une solution est :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x(x, y, z) = - \int_0^y A_{xy}(x, y, z) dy, \quad A_y = 0 \\ A_z(x, y, z) = \int_0^y A_{yz}(x, y, z) dy \\ \quad - \int_0^x A_{zx}(x, 0, z) dx + \lambda(z). \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, 1, p. 380.

La fonction $\lambda(z)$ n'interviendra pas dans nos calculs, et est en principe arbitraire. Nous obtenons donc les développements en série :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = -l_0 y - l_1 xy - l_2 \frac{y^2}{2} - l_{11} \frac{x^2}{2} y - l_{12} \frac{xy^2}{2} - l_{22} \frac{y^3}{6} \dots \\ A_y = 0 \\ A_z = \lambda(z) - k_0 x + h_0 y - k_1 \frac{x^2}{2} + h_1 xy + h_2 \frac{y^2}{2} \\ \quad - k_{11} \frac{x^3}{6} + h_{11} \frac{x^2 y}{2} + h_{12} \frac{xy^2}{2} + h_{22} \frac{y^3}{6} \dots \end{array} \right.$$

3. Equations des trajectoires. — Dans notre système de coordonnées, le principe de Maupertuis s'écrit :

$$(44) \quad \delta \int L dz = 0$$

avec :

$$(45) \quad L = \mu_0(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + f^2} + e(A_x x' + A_y y' + A_z).$$

Les équations différentielles des trajectoires :

$$(46) \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

se mettent sous forme hamiltonienne, en introduisant les quantités :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\mu_0 x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + f^2}} + eA_x, \\ q = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\mu_0 y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + f^2}} + eA_y \end{array} \right.$$

et la fonction :

$$(48) \quad H = px' + qy' - L$$

exprimée au moyen de z, x, y, p, q :

$$(49) \quad H = -f \sqrt{\mu_0^2 - (p - eA_x)^2 - (q - eA_y)^2} - eA_z.$$

Les équations (46) sont équivalentes à :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p} & \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dy}{dz} = \frac{\partial H}{\partial q} & \frac{dq}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{array} \right.$$

Comme nous supposons x , y et leurs dérivées petits devant l'unité, il en sera de même de A_x , A_y , p et q d'après (43) et (47) et nous pouvons développer L ou H en série de puissances croissantes de x , y , x' , y' ou de x , y , p , q .

Nous poserons :

$$(51) \quad \mu_0(x, y, z) = n + a_1 x + a_2 y + a_{11} \frac{x^2}{2} + a_{12} xy + a_{22} \frac{y^2}{2}.$$

En vertu de (5) et (7) nous avons :

$$(52) \quad n = c^{-1} \sqrt{(W - eV_0)^2 - m^2 c^4} = \sqrt{\left(2m + \frac{E - eV_0}{c^2}\right)(E - eV_0)}$$

d'où :

$$\kappa = \sqrt{m^2 + n^2 c^{-2}} = m + \frac{E - eV_0}{c^2}.$$

$$(53) \quad a_1 = -\kappa e b_1 n^{-1}; \quad a_2 = -\kappa e b_2 n^{-1}.$$

$$(54) \quad a_{ik} = -\kappa e b_{ik} n^{-1} - e^2 m^2 b_i b_k n^{-3} \quad i, k = 1, 2$$

formules qui se simplifient lorsqu'on peut négliger $E - eV_0$ devant mc^2 .

Nous sommes maintenant en mesure de développer L et H :

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = L_0 + L_1 + L_2 \\ H = H_0 + H_1 + H_2 \end{array} \right.$$

avec :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0 = n + e\lambda(z) \\ L_1 = (a_1 - n\theta - ek_0)x + (a_2 - n\omega + eh_0)y \\ L_2 = \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_1\theta - ek_1)x^2 \\ \quad + (a_{12} - a_2\theta - a_1\omega + eh_1)xy \\ \quad + \frac{1}{2}(a_{22} - 2a_2\omega + eh_2)y^2 - el_0 x'y + \frac{1}{2}n(x'^2 + y'^2). \end{array} \right.$$

magnétique et de leurs dérivées par rapport à x et y tout le long de la courbe $\mathbf{C}$ ⁽¹⁾.

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_0 = H_x(0, 0, z) \quad k_0 = H_y(0, 0, z) \quad l_0 = H_z(0, 0, z) \\ h_1 = -\theta H_x(0, 0, z) + \frac{\partial H_x}{\partial x}(0, 0, z) \\ k_1 = -\theta H_y(0, 0, z) + \frac{\partial H_y}{\partial x}(0, 0, z) \\ h_2 = -\omega H_x(0, 0, z) + \frac{\partial H_x}{\partial y}(0, 0, z) \\ k_2 = -\omega H_y(0, 0, z) + \frac{\partial H_y}{\partial y}(0, 0, z). \end{array} \right.$$

Jusqu'ici nous n'avons pas utilisé le fait que la courbe $\mathbf{C}$ est une trajectoire, et nos équations seraient valables, s'il n'en était pas ainsi, pourvu que la distance de $\mathbf{C}$ aux trajectoires soit un infiniment petit du même ordre que x et y . Si la courbe $\mathbf{C}$ est trajectoire, nos équations doivent admettre la solution $x(z) = 0, y(z) = 0$ ce qui entraîne :

$$(62) \quad d_1 - ek_0 = 0 \quad d_2 + eh_0 = 0.$$

Il est aisé de voir que ce sont là les équations intrinsèques de la trajectoire $\mathbf{C}$; il suffit pour cela de prendre un système de coordonnées tel qu'au point $0, 0, z$ on ait $\omega = 0, \theta = \frac{1}{R}$.

4. Propriétés des équations des trajectoires. — Si les conditions (62) sont vérifiées, les équations (60) sont de la forme :

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz}(nx' - Py) = Ax + By \\ \frac{d}{dz}(ny' + Px) = Cx + Dy \end{array} \right.$$

n, A, B, C, D, P , sont des fonctions de z .

Lorsque le champ magnétique est nul, cette forme se simplifie un peu et devient :

⁽¹⁾ M. COTTE. *Comptes Rendus*, **205** (1937), 129.

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} nX' = fX + rY \\ \frac{d}{dz} nY' = rX + sY. \end{array} \right.$$

n, f, r, s sont encore des fonctions de z .

On peut toujours passer de la forme (63) à la forme (64).

Faisons dans tout plan $z = z_0$ subir à nos axes de coordonnées x, y une rotation d'un angle $\alpha(z_0)$. Les anciennes coordonnées s'expriment en fonction des nouvelles par les relations :

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{array} \right.$$

Si nous définissons l'angle α par la condition :

$$(66) \quad \alpha(z_0) = \int^{z_0} - \frac{P(z)}{2n(z)} dz = \int^{z_0} - \frac{eH_z}{2n} dz,$$

nous trouvons après un calcul facile :

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} nX' \\ \quad = X \left[-\frac{P^2}{4n} + \frac{A+D}{2} + \frac{A-D}{2} \cos 2\alpha + \frac{C+B}{2} \sin 2\alpha \right] \\ \quad + Y \left[\frac{P'}{2} - \frac{C-B}{2} - \frac{A-D}{2} \sin 2\alpha + \frac{C+B}{2} \cos 2\alpha \right] \\ \frac{d}{dz} nY' \\ \quad = X \left[-\frac{P'}{2} + \frac{C-B}{2} + \frac{C+B}{2} \cos 2\alpha - \frac{A-D}{2} \sin 2\alpha \right] \\ \quad + Y \left[-\frac{P^2}{4n} + \frac{A+D}{2} - \frac{A-D}{2} \cos 2\alpha - \frac{C+B}{2} \sin 2\alpha \right]. \end{array} \right.$$

qui est bien la forme (64), car :

$$(68) \quad P' + B - C = l'_0 + h_1 + k_2 = 0.$$

Ce théorème est évidemment apparenté au théorème de Larmor ; si l'on considère des axes $Oxyz$ transportés par le corpuscule dans son mouvement (avec Oz dans la direction du mouvement), on a à chaque instant $\frac{dz}{dt} = v$ et comme à

l'approximation newtonienne, $n = mv$ on a d'après (66) :

$$(69) \quad \alpha(t) = \int^t -\frac{eH(t)v dt}{2mv} = \int^t -\frac{eH}{2m} dt.$$

La vitesse angulaire ω de la rotation $\alpha(t)$ est :

$$(70) \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{eH}{2m}.$$

ω est donc bien la vitesse angulaire de Larmor instantanée ⁽¹⁾. Grâce à ce théorème, on peut, à l'approximation de Gauss, ramener un problème de trajectoires dans un champ quelconque à un autre problème où le champ magnétique est nul. Remarquons que le système de coordonnées XYz n'est plus triple orthogonal.

5. Réduction des équations des trajectoires. — Les équations (63) sont formées de deux équations différentielles simultanées en x et y , *linéaires* du deuxième ordre.

Quand $P = B = C = 0$, les deux équations deviennent indépendantes. A l'approximation de Gauss, le système formé par la trajectoire **C** et le milieu qui l'entoure jouit des propriétés des systèmes orthogonaux que nous étudierons en détail. Si de plus $A = D$, les équations en x et y sont identiques ; nous appellerons ce système un système gaussique.

Quand $A = D$, $B = -C$, la transformation (65) (66) permet de ramener les équations (63) à celles d'un système gaussique ; un exemple très remarquable est celui des systèmes centrés, pour lequel le champ électrique et le champ magnétique ont une symétrie de révolution autour d'une droite.

Les deux cas ci-dessus sont les plus intéressants ; on peut citer encore deux autres cas où l'intégration des équations (63) se trouve facilitée :

Le premier est le cas où $A = 0$, $B = 0$, ou encore $C = 0$, $D = 0$, car en tirant une inconnue d'une équation (63) et en

(1) Je dois ce raisonnement à M. Louis de Broglie.

portant dans l'autre, on obtient une équation du second ordre. Le second est le cas où P (ou Hx) = const., nA = const., nB = const., nC = const., nD = const. L'intégration de (63) se ramène à des quadratures; en effet, si on cherche des solutions de la forme :

$$(71) \quad x = \alpha e^{\int kn^{-1} dz} \quad y = \beta e^{\int kn^{-1} dz}$$

où α , β et k désignent des constantes, on obtient les deux équations :

$$(72) \quad \begin{cases} \alpha(k^2 - An) + \beta(-kP - Bn) = 0 \\ \alpha(kP - Cn) + \beta(k^2 - Dn) = 0. \end{cases}$$

Pour qu'elles aient une solution autre que $\alpha = \beta = 0$, il faut que k vérifie une équation algébrique du quatrième degré. A chaque racine de cette équation correspond une valeur du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$, et des solutions particulières de la forme (71). La solution générale de (71) est la somme de quatre solutions particulières distinctes, donc correspondant à des valeurs de k différentes. Si l'équation en k avait ses racines confondues une méthode de passage à la limite permettrait d'obtenir la solution du problème.

III. — Les systèmes orthogonaux à l'approximation de Gauss.

1. Equations et propriétés des trajectoires. — Un système est orthogonal si la trajectoire moyenne est contenue dans un plan qui est en même temps plan de symétrie pour le potentiel scalaire et le champ magnétique, compte tenu de la symétrie particulière du champ magnétique qui est un vecteur axial. Ces systèmes ont une grande importance, car ils contiennent presque tous les dispositifs utilisés en spec-

trographie de masse, et des cas particuliers ont déjà fait l'objet de nombreux travaux ⁽¹⁾.

Nous prendrons le plan de symétrie P pour plan $y = 0$; V , n , A_x , A_z sont des fonctions paires de y ; en tout point de P, le champ électrique est situé dans P, le champ magnétique normal à P. Par suite de la symétrie :

$$(73) \quad \omega = b_2 = d_2 = h_0 = l_0 = b_{12} = d_{12} = h_1 = k_2 = 0$$

$$(74) \quad p = nx' \quad q = ny'$$

θ est, en valeur absolue, l'inverse du rayon de courbure au point x . Si nous affectons de l'indice 0, les valeurs des champs et de leurs dérivées prises le long de C, les équations (60) se réduisent à :

$$(75 a) \quad g(z) + \frac{d}{dz}(nx') = xf(z),$$

$$(75 b) \quad \frac{d}{dz}(ny') = y \left[xen^{-1} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} \right)_0 + e \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_0 \right]$$

avec :

$$(76) \quad \begin{cases} g(z) = eH_y^0 - xen^{-1}E_x^0 + n\theta \\ f(z) = xen^{-1} \left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_0 - 2\theta E_x^0 \right] \\ \quad - m^2 e^2 n^{-2} (E_x^0)^2 + e \left[\theta H_y^0 - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_0 \right]. \end{cases}$$

En passant des équations (60) à (75) nous avons dans la seconde équation remplacé $\frac{\partial H_x}{\partial y}$ par $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ qui lui est égal en vertu de (38); nous verrons plus loin une conséquence

⁽¹⁾ W. E. STEPHENS. *Phys. Rev.*, **45** (1934), 513; HENNEBERG. *Ann. Physik*, **20** (1934), 1; **21** (1934), 390; R. HERZOG. *Z. Physik*, **89** (1934), 447; J. MATTAUCH et HERZOG. *Z. Physik*, **89** (1934), 786; SAWYER. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32** (1936), 453; L. CARTAN. *Journ de Physique*, **8** (1937), 453, etc.

On trouvera une bibliographie complète des travaux antérieurs à 1934 dans le livre de Brüche et Scherzer. *Geometrische Elektronenoptik*.

importante de cette transformation; une autre conséquence intéressante du fait que $\frac{\partial H_g}{\partial x}$ a des signes opposés dans (75 a) et (75 b), et que la masse de la particule augmente avec la vitesse, est la limitation des énergies que des ions peuvent acquérir dans un cyclotron, qui a été découverte par Bethe et Rose ⁽¹⁾.

Si on connaît la solution de (75 a) pour $g = 0$, la méthode de variation des constantes nous permet de calculer la solution pour $g \neq 0$. Nous supposons donc dorénavant $g = 0$. La courbe **C** est une trajectoire.

L'intégrale générale de (75 a) s'exprime linéairement en fonction de deux solutions particulières. Prenons par exemple les solutions $u(z)$ et $v(z)$ définies par :

$$(77) \quad \begin{cases} u(a) = 1 & u'(a) = 0 \\ v(a) = 0 & n(a)v'(a) = 1. \end{cases}$$

Soit de même $w(z)$ et $l(z)$ les solutions particulières de (75 b) définies par :

$$(78) \quad \begin{cases} w(a) = 1 & w'(a) = 0 \\ l(a) = 0 & n(a)l'(a) = 1. \end{cases}$$

Posons :

$$n(a) = n_a.$$

La trajectoire définie par les valeurs initiales :

$$x(a) = x_a, \quad y(a) = y_a, \quad x'(a) = x'_a, \quad y'(a) = y'_a$$

a pour équations :

$$(79) \quad \begin{cases} x = x_a u(z) + n_a x'_a v(z) \\ y = y_a w(z) + n_a y'_a l(z). \end{cases}$$

⁽¹⁾ BETHE. *Physical Review*, **52** (1937), 1254; ROSE. *Phys. Rev.*, **53** (1938), 392.

De plus :

$$(80) \quad \begin{cases} p = nx' = nu'x_a + nv'n_ax'_a \\ q = ny' = nw'y_a + nt'n_ay'_a \end{cases}$$

On résume ces relations, grâce à une notion matricielle ⁽¹⁾ :

$$(81) \quad \begin{vmatrix} x \\ nx' \end{vmatrix} = M_{za} \begin{vmatrix} x_a \\ n_ax'_a \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{za} = \begin{vmatrix} u(z) & v(z) \\ nu'(z) & nv'(z) \end{vmatrix}$$

$$(82) \quad \begin{vmatrix} y \\ ny' \end{vmatrix} = N_{za} \begin{vmatrix} y_a \\ n_ay'_a \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad N_{za} = \begin{vmatrix} w(z) & t(z) \\ nw'(z) & nt'(z) \end{vmatrix}$$

Les équations (79) appellent un certain nombre de remarques : Tout d'abord $x(z)$ se calcule indépendamment de y_a et de y'_a ; donc la forme de la projection d'une trajectoire sur le plan P, ($y = 0$) est indépendante de y_a, y'_a ; cette projection est elle-même une trajectoire.

De même $y(z)$ se calcule indépendamment de x_a et de x'_a ; la forme de la projection d'une trajectoire sur le cylindre $x = 0$ est indépendante de x_a, x'_a ; cette projection est une trajectoire.

Nous dirons que la surface $y = 0$ est la première section principale du système, la surface $x = 0$ la seconde.

Supposons que $v(z)$ s'annule non seulement pour $z = a$, mais encore pour $z = b_1, z = b_2$, etc. Toutes les trajectoires issues du point $z = a$ de **C** et situées dans le plan $y = 0$, recouperont **C** aux points $z = b_1, z = b_2$, etc. Nous dirons que les points a, b_1, b_2 , etc., sont conjugués dans la première section principale du système. De même si $t(z)$ s'annule pour $z = a, z = c_1, z = c_2$, etc., toutes les trajectoires issues du point $z = a$ de **C**, et situées sur le cylindre $x = 0$, recouperont **C** aux points $z = c_1, z = c_2$, etc. Les points a, c_1, c_2 sont des points conjugués dans la seconde section principale.

Les trajectoires issues du point $z = a$ de **C**, et qui ne se

(1) On trouvera cette notation employée systématiquement pour des problèmes optiques analogues dans le livre de HERZBERGER. *Strahlenoptik*. Springer, Berlin (1931).

trouvent pas dans une section principale ne recouperont pas **C**, sauf si v et t s'annulent simultanément pour une valeur z_1 de z autre que $z = a$. Dans ce cas toutes les trajectoires issues du point $z = a$ de **C** recouperont **C** au point $z = z_1$; nous dirons que le point $z = a$ est un point stigmatique.

Si les équations (75) sont identiques, c'est-à-dire si :

$$(83) \quad f(z) = \frac{ze}{n} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} \right)_0 + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_0$$

tous les points de **C** sont stigmatiques; notre système est gaussique.

Les trajectoires issues du point $z = a$ de **C**, supposé non stigmatique, ne se recouperont pas, mais s'appuieront sur des éléments de droite, les uns perpendiculaires à **P** aux points de **C** dont les abscisses z correspondent aux zéros de $v(z)$, les autres situées dans le plan **P** et perpendiculaires à **C** aux points dont les abscisses z correspondent aux zéros de $t(z)$. Par analogie avec l'optique, il est naturel d'appeler les premiers éléments de droite focales sagittales, les autres, focales tangentielles.

Considérons maintenant ce qui se passe pour un point $M(x_a, y_a, a)$ situé dans le plan $z = a$, mais en dehors de **C**. Si le point $(0, 0, a)$ est stigmatique et a pour conjugué le point $(0, 0, z_1)$, nous voyons que quels que soient x'_a, y'_a :

$$(84) \quad \begin{cases} x(z_1) = x_a u(z_1) \\ y(z_1) = y_a w(z_1) \end{cases}$$

Toutes les trajectoires issues de **M** iront converger en un point M_1 du plan $z = z_1$ dont les coordonnées sont données par (84). La formule (84) établit entre **M** et M_1 une correspondance affine; on pourra regarder les plans $z = a$ et $z = z_1$ comme des plans conjugués, et parler d'un grandissement sagittal et d'un grandissement tangentiel. Nous pourrions aussi parler, comme en optique, d'une correspondance entre les points du *plan objet* $z = a$, et du *plan image* $z = z_1$.

Si le point $(0, 0, a)$ n'est pas stigmatique, nous voyons que si $v(z)$ s'annule en b_1 et $t(z)$ en c_1 , toutes les trajectoires s'appuyant sur la droite :

$$(85) \quad x = x_a \quad z = a$$

s'appuieront sur la droite :

$$(86) \quad x = x_a u(b_1) \quad z = b_1$$

et toutes les trajectoires s'appuyant sur la droite :

$$(87) \quad y = y_a \quad z = a$$

s'appuieront sur la droite :

$$(88) \quad y = y_a w(c_1) \quad z = c_1.$$

Les lignes $y = \text{const.}$ et les lignes $x = \text{const.}$ du plan $z = a$ sont des lignes reproductibles (Gullstrand). Nous dirons que les droites (85) et (86) ainsi que (87) et (88) sont des droites conjuguées.

Les développements ci-dessus représentent en gros les phénomènes ; ils appellent cependant quelques retouches quand on tient compte de la nature des approximations faites dans l'établissement des équations (75). Nous avons négligé dans le développement (55) les termes de degré trois, ce qui revient à négliger dans l'équation des trajectoires les termes de degré deux. Nous devons nous attendre à ce que les projections sur P des trajectoires issues du point M $(0, 0, a)$ de C passent à une distance du point $(0, 0, b_1)$ qui soit du second ordre par rapport à x'_a, y'_a , c'est-à-dire par rapport à l'angle α qu'elles font avec C en M.

Comme $x'(z_1), y'(z_1)$ sont du même ordre que x'_a, y'_a , donc que α les points où ces projections vont rencontrer C vont différer de z_1 d'une quantité qui est un infiniment petit du même ordre que α , c'est-à-dire du premier ordre. Il en est de même pour les projections sur le cylindre $x = 0$ au voisinage du point $(0, 0, c_1)$. Donc le calcul de l'approximation

de Gauss permet de répondre seulement d'infiniments petits du premier ordre perpendiculairement à $\mathbf{C}$, et de quantités *finies* mesurées parallèlement à $\mathbf{C}$. Si on veut répondre d'infiniments petits du premier ordre mesurés le long de $\mathbf{C}$, il faut absolument faire un calcul d'aberrations. Dans ces conditions, il n'y a plus au voisinage des points $(0, 0, b_1)$ $(0, 0, c_1)$ de focales, à proprement parler, mais seulement des aires d'amincissement, dont la section par un plan apparaît comme une ligne mince. Les plans normaux à $\mathbf{C}$ ne sont plus privilégiés; nous les avons pris pour plans de coordonnées $z = \text{const.}$ pour des raisons techniques de calcul, mais la trace des trajectoires issues du point (x_a, y_a, a) ne sera pas nécessairement plus mince dans un plan Q normal à $\mathbf{C}$ au point z_1 , que dans un plan Q_1 , passant par le point $0, 0, z_1$ et incliné sur $\mathbf{C}$, pourvu que Q_1 ne soit pas tangent à $\mathbf{C}$. De même la trace des trajectoires issues de points situés dans un plan R oblique sur $\mathbf{C}$ au point $(0, 0, a)$ pourra être recherchée indifféremment sur un plan Q normal à $\mathbf{C}$ ou un plan Q_1 oblique sur $\mathbf{C}$ au point z_1 , sans que l'on constate en général une différence marquée sur la netteté des focales observées.

Il y a là une différence profonde avec l'optique des systèmes centrés. Dans les systèmes centrés, les aberrations du second ordre sont nulles, en vertu de la symétrie de révolution; on peut donc répondre de quantités du second ordre mesurées normalement à l'axe, et de quantités du premier ordre mesurées le long de l'axe; par conséquent, toutes les surfaces normales à l'axe de révolution sont privilégiées. On peut traduire physiquement ce fait en disant que dans un système centré la profondeur de foyer ou la profondeur de champ est extrêmement faible, tandis qu'elle est appréciable dans les systèmes orthogonaux que nous étudions.

2. Calcul des trajectoires. — A l'approximation de Gauss, les matrices M_{za} et N_{za} permettent de calculer les valeurs $x(z)$, $x'(z)$, $y(z)$, $y'(z)$ quand on connaît x_a , x'_a , y_a , y'_a ; elles

caractérisent la portion du système comprise entre a et z . Décomposons l'intervalle a, z en deux intervalles a, b et b, z . La portion du système comprise entre a et b est caractérisée par les matrices M_{ba}, N_{ba} , la portion comprise entre b et z est caractérisée par M_{zb}, N_{zb} .

Il est évident que :

$$(89) \quad M_{za} = M_{zb} M_{ba} \quad N_{za} = N_{zb} N_{ba}.$$

On généralise immédiatement au cas d'un nombre quelconque d'intervalles associés bout à bout : $ab, bc, \dots, hz$. Par exemple :

$$(90) \quad M_{za} = M_{zh} \dots M_{cb} M_{ba}.$$

Nous allons indiquer comment on peut calculer les matrices M , un calcul parallèle donnera les matrices N .

Dans le cas particulier où $nf = \text{const.} = k$, on obtient u, v et M simplement par quadratures. En effet, l'équation (75) où nous supposons $g = 0$, admet des solutions particulières de la forme :

$$(91) \quad x = e^{\int n^{-1} \sqrt{k} dz}$$

nous poserons :

$$(92 a) \quad \varphi(z) = \int_a^b \sqrt{fn^{-1}} dz \quad \text{si } f(z) > 0$$

$$(92 b) \quad \varphi(z) = \int_a^b \sqrt{-fn^{-1}} dz \quad \text{si } f(z) < 0.$$

En tenant compte des conditions initiales, on trouve :

$$(93) \quad u = \text{ch } \varphi(z) \quad v = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ sh } \varphi(z) \quad \text{si } f(z) > 0$$

$$(94) \quad u = \cos \varphi(z) \quad v = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sin \varphi(z) \quad \text{si } f(z) < 0,$$

et, par suite, selon que k est > 0 ou < 0 :

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{za} = \begin{vmatrix} \text{ch } \varphi(z) & \frac{1}{\sqrt{k}} \text{sh } \varphi(z) \\ \sqrt{k} \text{sh } \varphi(z) & \text{ch } \varphi(z) \end{vmatrix} \\ \text{ou :} \\ M_{za} = \begin{vmatrix} \cos \varphi(z) & \frac{1}{\sqrt{-k}} \sin \varphi(z) \\ -\sqrt{-k} \sin \varphi(z) & \cos \varphi(z) \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

Si f et k sont nuls, nous avons les solutions :

$$(96) \quad u(z) = 1 \quad v(z) = \int_a^z \frac{dz}{n(z)}$$

$$(97) \quad M_{za} = \begin{vmatrix} 1 & \int_a^z \frac{dz}{n(z)} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dans le cas général où nf n'est pas constant, on peut toujours trouver des solutions $u(z)$ et $v(z)$ par une méthode d'approximations successives introduite en optique électronique par O. Scherzer ⁽¹⁾.

Elle consiste à mettre la solution de l'équation :

$$(98) \quad \frac{d}{dz} nx' = f(z)x$$

qui satisfait aux conditions initiales $x(a) = x_a$, $x'(a) = x'_a$ sous la forme :

$$(99) \quad x = x_a + n_a x'_a \int_a^z \frac{dz}{n(z)} + \int_a^z \frac{1}{n(z)} \int_a^z x(z) f(z) dz dz.$$

Si on introduit dans le second membre une valeur approchée de $x(z)$ à la place de $x(z)$, le premier membre donne une valeur plus exacte ; on peut répéter le processus, et on obtient une suite de valeurs de plus en plus exactes pour $x(z)$. Cette suite se transforme aisément en une série, qui est

(1) O. SCHERZER. *Z. Physik*, **80**, 103, 1933.

absolument et uniformément convergente si $f(z)$ et $\frac{1}{n(z)}$ sont bornés, et qui représente la solution ⁽¹⁾.

Les plus simples des développements en série ainsi obtenus sont les séries :

$$(100) \quad \rho(z) = \sum_{v=0}^{v=\infty} \rho_{2v} \quad \sigma(z) = \sum_{v=0}^{v=\infty} \sigma_{2v+1}$$

où :

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \int_a^z f(z) dz, \quad \rho_2 = \int_a^z \frac{\rho_1(z)}{n(z)} dz \\ \rho_{2v} = \int_a^z \frac{\rho_{2v-1}(z)}{n(z)} dz \quad \rho_{2v+1} = \int_a^z f(z) \rho_{2v}(z) dz \end{array} \right.$$

et :

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 = 1 \quad \sigma_1 = \int_a^z \frac{1}{n(z)} dz \quad \sigma_2 = \int_a^z f(z) \sigma_1(z) dz \\ \sigma_{2v} = \int_a^z f(z) \sigma_{2v-1}(z) dz \quad \sigma_{2v+1} = \int_a^z \frac{\sigma_{2v}(z)}{n(z)} dz \end{array} \right.$$

La somme $\rho(z)$ des termes pairs de la suite ρ représente la solution $u(z)$; la somme $\sigma(z)$ des termes impairs de la suite σ représente la solution $v(z)$. La somme des termes impairs de la suite ρ représente $n(z) \frac{du}{dz}$; la somme des termes pairs de la suite σ représente $n(z) \frac{dv}{dz}$, si bien que la matrice M_{za} peut se représenter par :

$$(103) \quad M_{za} = \begin{vmatrix} \sum_{v=0}^{v=\infty} \rho_{2v} & \sum_{v=0}^{v=\infty} \sigma_{2v+1} \\ \sum_{v=0}^{v=\infty} \rho_{2v+1} & \sum_{v=0}^{v=\infty} \sigma_{2v} \end{vmatrix}$$

Il est aisé d'avoir un ordre de grandeur pour les termes de ces séries. En effet, supposons que dans l'intervalle a, z , les fonctions $f(z)$ et $\frac{1}{n(z)}$ soient respectivement inférieures en

(1) E. GOURSAT. *Cours d'Analyse*, 2, 384 et 3, 2.

valeur absolue à deux nombres fixes M et N ; on voit que :

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\rho_{2\nu}(z)| < (MN)^\nu \frac{(z-a)^{2\nu}}{(2\nu)!} \\ |\rho_{2\nu+1}(z)| < M(MN)^\nu \frac{(z-a)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \end{array} \right.$$

$$(105) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_{2\nu}(z)| < (MN)^\nu \frac{(z-a)^{2\nu}}{(2\nu)!} \\ |\sigma_{2\nu+1}(z)| < N(MN)^\nu \frac{(z-a)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \end{array} \right.$$

Nous terminerons ces considérations par deux remarques :
 1° soient x_1 et x_2 deux solutions distinctes quelconques de l'équation (98). Des relations :

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz}(nx'_2) = f(z)x_2 \\ \frac{d}{dz}(nx'_1) = f(z)x_1 \end{array} \right.$$

on déduit :

$$x_1 \frac{d}{dz}(nx'_2) - x_2 \frac{d}{dz}(nx'_1) = 0$$

ou :

$$(107) \quad \frac{d}{dz} [n(x_2x'_1 - x_1x'_2)] = 0$$

ou :

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} n(z)[x_2(z)x'_1(z) - x_1(z)x'_2(z)] \\ = n(a)[x_2(a)x'_1(a) - x_1(a)x'_2(a)] = \text{Const.} \end{array} \right.$$

Supposons que par un procédé quelconque, on connaisse $x_2(z)$. L'équation (108) peut être regardée comme une équation différentielle du premier ordre en $x_1(z)$, et on obtient ainsi la solution générale de (98) sous la forme :

$$(109) \quad x(z) = C_1 x_2(z) + C_2 x_2(z) \int^z \frac{dz}{n(z)[x_2(z)]^2}.$$

C_1 et C_2 sont des constantes.

2° Si dans l'équation (108) nous faisons $x_2 = u(z)$, $x_1 = v(z)$ nous obtenons une relation, qui rapprochée de (77) montre

que le déterminant de la matrice M_{za} est égal à 1. Il est de même du déterminant de N_{za} .

3. Etude du cas où le début et la fin des trajectoires sont situés dans des régions de champ nul. — Supposons les trajectoires issues du plan $z = z_0$; délimitons la région occupée par les champs par deux plans $z = a$, $z = b$; nous avons $z_0 < a < b$. Dans la région $z_0 a$, et dans la région au delà de b , l'indice n sera constant et vaudra respectivement n_a et n_b . Pour étudier la section des trajectoires par le plan $z = z_1$ ($z_1 > b$), il suffit de calculer $M_{z_1 z_0}$ et $N_{z_1 z_0}$.

Or :

$$(110) \quad M_{z_1 z_0} = M_{z_1 b} M_{ba} M_{az_0}$$

Nous poserons :

$$(111) \quad M_{ba} = \begin{vmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{vmatrix}$$

M_{ba} est caractéristique de la région comprise entre les plans $z = b$ et $z = a$ et reste inchangée par un déplacement des plans $z = z_0$ et $z = z_1$. D'autre part :

$$(112) \quad M_{z_1 b} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{z_1 - b}{n_b} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{az_0} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a - z_0}{n_a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Posons :

$$(113) \quad z_0 - a = \zeta \quad z_1 - b = \zeta'.$$

Nous avons :

$$(114) \quad \left\{ \begin{aligned} & \begin{vmatrix} x(z_1) \\ n_b x'(z_1) \end{vmatrix} = M_{z_1 z_0} \begin{vmatrix} x(z_0) \\ n_a x'(z_0) \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\zeta'}{n_b} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\zeta}{n_a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(z_0) \\ n_a x'(z_0) \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} \chi_{11} + \chi_{21} \frac{\zeta'}{n_b} & \chi_{12} - \chi_{11} \frac{\zeta}{n_a} + \left(\chi_{22} - \chi_{21} \frac{\zeta}{n_a} \right) \frac{\zeta'}{n_b} \\ \chi_{21} & \chi_{22} - \chi_{12} \frac{\zeta}{n_a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(z_0) \\ n_a x'(z_0) \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

Si :

$$(115) \quad \chi_{12} - \chi_{11} \frac{\zeta}{na} + \left(\chi_{22} - \chi_{21} \frac{\zeta}{na} \right) \frac{\zeta'}{nb} = 0.$$

les points $z = z_0$ et les points $z = z_1$ sont conjugués dans la première section principale.

En identifiant les relations exprimées par (114) avec les relations bien connues de l'homographie optique, on peut définir des foyers et des points principaux pour les trajectoires de la première section principale.

A partir de la matrice :

$$(116) \quad N_{ab} = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix}$$

analogue à M_{ab} , on peut définir des foyers et des points principaux pour les trajectoires de la seconde section principale ; il suffit de remplacer dans les formules ci-dessus les χ_{ij} par les τ_{ij} .

Dans chacune des sections principales, un point a un conjugué et un seul, qui peut être réel, ou virtuel. Un point stigmatique est un point dont les deux conjugués coïncident. Les points stigmatiques sont donnés par l'équation en ζ :

$$(117) \quad \frac{\chi_{12} - \chi_{11} \frac{\zeta}{na}}{\chi_{22} - \chi_{21} \frac{\zeta}{na}} = \frac{\tau_{12} - \tau_{11} \frac{\zeta}{na}}{\tau_{22} - \tau_{21} \frac{\zeta}{na}}.$$

Comme en optique, il peut y avoir 0, 1 ou 2 points stigmatiques, qui peuvent d'ailleurs être virtuels.

4. Etude de divers cas particuliers. — On peut utiliser la relation :

$$(118) \quad g(z) = eH_y^0 - zen^{-1}E_x^0 + n\theta = 0$$

ainsi que l'équation de Poisson :

$$(119) \quad -V_0'' + \frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{\partial E_y^0}{\partial y} - \theta E_x^0 = 4\pi c^2 \rho_0(z)$$

pour simplifier l'équation (75 a). Si nous exprimons H_y^0 en fonction de E_x^0 et θ , nous trouvons :

$$(120) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dz}(nx') &= x \left[-n\theta^2 + xen^{-1} \left(4\pi c^2 \rho_0 + V_0'' - \frac{\partial E_y^0}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - m^2 e^2 n^{-3} (E_x^0)^2 - e \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)_0 \right]. \end{aligned} \right.$$

On considère souvent des systèmes où la trajectoire moyenne est équipotentielle ($V_0'' = 0$), où le champ électrique est un champ de condensateur cylindrique ($\frac{\partial E_y^0}{\partial y} = 0$) et où la charge d'espace est négligeable ($\rho = 0$). On retrouve ainsi facilement des résultats de Henneberg ⁽¹⁾, qui a étudié des dispositifs où sont superposés un champ électrique de condensateur cylindrique circulaire, un champ magnétique uniforme H_1 et un champ H_2 de dipôle magnétique placé selon l'axe du condensateur.

La trajectoire moyenne étant un cercle, Henneberg trouve une focalisation dans le plan $y = 0$ après un parcours dans le champ qui correspond à un angle au centre Φ :

$$(121) \quad \Phi = \frac{\pi}{\sqrt{1 + k^2 - 3\eta}}$$

avec :

$$k = \frac{meE_x}{n^2\theta} \text{ (terme électrique).}$$

$$(122) \quad \eta = -\frac{eH_2}{n\theta} \text{ (terme de doublet magnétique).}$$

Henneberg ne s'est pas occupé de la marche des rayons dans la deuxième section principale. Il est aisé de voir que son système devient gaussique pour :

$$(123) \quad \eta = \frac{1 + k^2}{6}.$$

Comme ces systèmes sont en général dispersifs, on peut les

⁽¹⁾ HENNEBERG, *Annalen der Physik*, **20**, 1934, 8.

utiliser pour obtenir le spectre d'une source linéaire disposée perpendiculairement au plan $y = 0$. Dans le cas d'un système gaussique, les trajectoires issues d'un point de la source se rassemblent en un point (au second ordre près) au lieu de s'appuyer sur une focale ; donc, les spectres produits par les différents points de la source ne se mélangeront pas, ce qui peut être intéressant si on possède des sources dont l'émission n'est pas uniforme. En optique, des montages de dispersion stigmatiques sont fréquemment employés en spectroscopie, où ils ont permis de découvrir l'effet de pôle, et attiré l'attention sur les raies d'étincelle.

On peut espérer que des dispositifs stigmatiques rendront des services en spectrographie de masse ou de vitesse.

L'entrée d'un faisceau de trajectoires entre les pièces polaires d'un aimant présente un autre cas particulier intéressant ⁽¹⁾.

Jusqu'ici nous avons supposé implicitement l'existence et la continuité de toutes les dérivées dont nous avons besoin. Du point de vue physique, ce n'est pas une restriction, puisque dans les régions que peut traverser un faisceau de trajectoires, les champs électriques et magnétiques sont des fonctions analytiques sans singularités, donc indéfiniment dérivables. Cependant, au point de vue calcul, on peut avoir intérêt à remplacer en première approximation des régions où les champs et leurs dérivées varient rapidement, par des régions de discontinuité. Ce sera légitime si le résultat dépend simplement de la valeur de la discontinuité.

Supposons donc les pièces polaires limitées par une surface plane Q . Le champ magnétique passe de la valeur 0, qu'il possède dans une région (1) limitée par le plan Q' , à la valeur H , qu'il possède dans une région (2) limitée par le plan Q'' , en prenant toute une série de valeurs intermédiaires dans une couche de passage située entre Q' et Q'' . Les

⁽¹⁾ HERZOG. *Zeitschrift für Physik*, **89** (1934), 447 ; M. COTTE. *Comptes rendus*, **205** (1937), 974.

plans Q' et Q'' sont voisins de Q et on peut admettre que dans le plan xz le champ magnétique a une même valeur le long de toute droite parallèle à Q (fig. 1).

La variation de H_y^0 est rapide dans la couche de passage ; celle de $\frac{\partial H_y}{\partial x}$, donc celle de $f(z)$, sera encore plus rapide. En revanche, nous supposons $n(z)$ constant. Si nous nous reportons à la page 27 et si nous cherchons à représenter

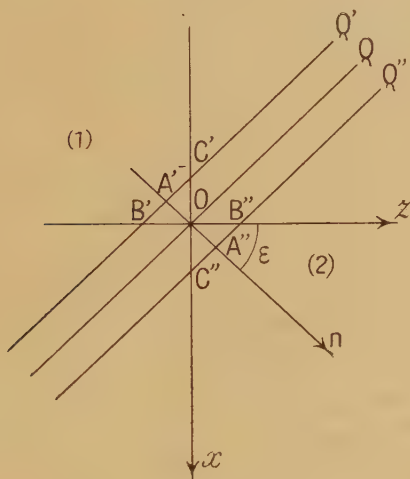


Fig. 1.

l'action de la couche de passage par une matrice M_{sa} , nous voyons que le nombre M sera très grand ; les termes les plus importants seront ρ_0 , ρ_1 (de l'ordre de $M(z - a)$ et σ_0 ; si l'épaisseur de la couche de passage est suffisamment petite, on pourra négliger les autres. Or à ce degré d'approximation :

$$(124) \quad \rho_1 = - \int_a^z e \frac{\partial H_y}{\partial x} dz.$$

Soit ε l'angle aigu que fait la tangente Oz à la trajectoire en

O avec la normale à Q. Soient A' , A'' , B' , B'' , C' , C'' les points de rencontre avec $Q'Q''$ de cette normale, de Oz et de Ox ; et soit dn l'élément de longueur compté selon $A'A''$, et ΔH la variation du champ magnétique quand on passe de la région (1) à la région (2).

$$(125) \quad \Delta H = \int_{B'}^{B''} \frac{\partial H_y}{\partial z} dz = \int_{C'}^{C''} \frac{\partial H_y}{\partial x} dx = \int_{A'}^{A''} \frac{dH_y}{dn} dn.$$

Or on peut associer les éléments dx , dn , dz de façon que l'on ait constamment :

$$(126) \quad dn = dz \cos \varepsilon \quad dn = dx \sin \varepsilon.$$

Donc :

$$(127) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{dz}{dx} \frac{\partial H_y}{\partial z} = \operatorname{tg} \varepsilon \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

$$(128) \quad \rho_1 = -e \operatorname{tg} \varepsilon \int_a^z \frac{\partial H_y}{\partial z} dz = -e \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \Delta H.$$

L'action de la couche de passage, sur les trajectoires de la première section principale ($y = 0$) pourra se représenter par la matrice de transition :

$$(129) \quad M_t = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -e\Delta H \operatorname{tg} \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$$

Du même coup, nous voyons que sur les trajectoires de la seconde section principale ($x = 0$), l'action de la couche de passage sera représentée par :

$$(130) \quad N_t = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e\Delta H \operatorname{tg} \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$$

puisque dans les équations (75 a) et (75 b) $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ a un signe opposé. Le fait que la zone de transition à l'entrée ou à la sortie des pièces polaires d'un électro-aimant pouvait provoquer une convergence des trajectoires dans la deuxième section principale a été découvert expérimentalement par

Livingston sur un cyclotron, et expliqué par lui de la façon suivante ⁽¹⁾ :

« Les lignes de force magnétique, vers la limite des pièces polaires, sont courbes, les ions ⁽²⁾, éprouveront une force de rappel proportionnelle à leur éloignement du plan de symétrie ».

Cette interprétation, parfaitement correcte, est très intuitive mais ne saurait donner immédiatement l'ordre de grandeur du phénomène ; notre calcul a l'avantage de souligner une parenté des phénomènes dans les deux plans de section principale. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les dispositifs introduits par Herzog ⁽³⁾ en spectrographie de masse : ils sont constitués en principe par une région où règne un champ magnétique uniforme H perpendiculaire au plan du tableau (entrefer d'un électro-aimant).

On peut la supposer limitée par deux plans Q, R puisqu'on se rend compte aisément qu'à l'approximation de Gauss, la courbure des surfaces qui limitent extérieurement les pièces polaires n'intervient pas.

La trajectoire moyenne perce les plans Q et R en des points que nous appellerons O, O' et ses tangentes en O, O' (orientées dans le sens du mouvement) font avec les normales à Q et R des angles ε' et ε'' . Désignons par l la longueur de l'arc OO' , par a son rayon (en valeur arithmétique). Comptons les valeurs de $x(z)$ positivement vers l'extérieur du cercle OO' ; les angles ε' et ε'' sont ainsi susceptibles de valeurs comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. L'action du champ magnétique, y compris celles des couches de passage sera caractérisée par une matrice $M_{00'}$, qui liera les valeurs de x et x' immédiatement après la sortie du champ (soient x_b et x'_b) aux

(1) S. LIVINGSTON. *Reviews of Scientific Instruments*, **7** (1936), 57.

(2) Si ε n'est pas nul.

(3) HERZOG. *Zeitschrift für Physik*, **89** (1934), 447.

valeurs de x et x' immédiatement avant l'entrée du champ (soient x_a et x'_a).

$$(131) \quad \begin{vmatrix} x_b \\ nx'_b \end{vmatrix} = M_{00'} \begin{vmatrix} x_a \\ nx'_a \end{vmatrix}$$

$$(132) \quad M_{00'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ eH \operatorname{tg} \varepsilon'' & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \frac{l}{a} & \frac{a}{n} \sin \frac{l}{a} \\ -\frac{n}{a} \sin \frac{l}{a} & \cos \frac{l}{a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -eH \operatorname{tg} \varepsilon' & 1 \end{vmatrix}$$

Si nous tenons compte de ce que :

$$(133) \quad \frac{1}{a} = \frac{eH}{n}$$

et si nous posons :

$$(134) \quad \frac{l}{a} = \Phi,$$

nous pouvons encore écrire :

$$(135) \quad \begin{vmatrix} x_b \\ x'_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\operatorname{tg} \varepsilon''}{a} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \Phi & a \sin \Phi \\ -\frac{1}{a} \sin \Phi & \cos \Phi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{a} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_a \\ x'_a \end{vmatrix}$$

formule qui ne diffère d'une formule écrite par Herzog, que par la notation matricielle, et l'orientation de l'angle ε' . On étudierait de la même façon les propriétés du système dans la seconde section principale, et on aboutirait à la formule nouvelle :

$$(136) \quad \begin{vmatrix} y_b \\ y'_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon''}{a} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a\Phi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{a} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_a \\ x'_a \end{vmatrix}$$

Si on effectue les multiplications de matrices, on trouve :

$$(137) \quad \begin{vmatrix} x_b \\ x'_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos(\Phi + \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} & a \sin \Phi \\ -\frac{\sin(\Phi + \varepsilon' - \varepsilon'')}{a \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} & \frac{\cos(\Phi - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_a \\ x'_a \end{vmatrix}$$

$$(138) \quad \begin{vmatrix} y_b \\ y'_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \Phi \operatorname{tg} \varepsilon' & a\Phi \\ a^{-1}(\operatorname{tg} \varepsilon' - \operatorname{tg} \varepsilon'' - \Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon'') & 1 - \Phi \operatorname{tg} \varepsilon'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_a \\ y'_a \end{vmatrix}$$

Les positions des points cardinaux, rapportées à l'origine O dans le milieu objet, l'origine O' dans le milieu image sont données dans le tableau suivant :

1° Pour les trajectoires de la première section principale ($y = 0$) :

Foyer objet :

$$z_F = a \frac{-\cos(\Phi - \varepsilon'') \cos \varepsilon'}{\sin(\Phi + \varepsilon' - \varepsilon'')}.$$

Point principal objet :

$$z_H = a \frac{-\cos(\Phi - \varepsilon'') \cos \varepsilon' + \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin(\Phi + \varepsilon' - \varepsilon'')}.$$

Foyer image :

$$z_{F'} = a \frac{\cos \varepsilon'' \cos(\Phi + \varepsilon')}{\sin(\Phi + \varepsilon' - \varepsilon'')}.$$

Point principal image :

$$z_{H'} = a \frac{\cos(\Phi + \varepsilon') \cos \varepsilon'' - \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin(\Phi + \varepsilon' - \varepsilon'')}.$$

Distance focale :

$$F = a \frac{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin(\Phi + \varepsilon' - \varepsilon'')}.$$

(positive si le système est convergent).

Au point ζ de l'espace objet correspond le point ζ_1 de l'espace image tel que :

$$(139) \quad -\frac{\zeta_1'}{a} = \frac{-\sin \Phi + \frac{\zeta_1}{a} \frac{\cos(\Phi + \varepsilon')}{\cos \varepsilon'}}{-\frac{\cos(\Phi - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} - \frac{\zeta_1}{a} \frac{\sin(\Phi + \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}}.$$

2° Pour les trajectoires de la deuxième section principale.

Foyer objet :

$$z_F = \frac{-a(1 - \Phi \operatorname{tg} \varepsilon'')}{\Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon'' - \operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon''}.$$

Point principal objet :

$$z_H = \frac{a\Phi \operatorname{tg} \varepsilon''}{\Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon'' - \operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon''}.$$

Foyer image :

$$z'_{F'} = \frac{a(1 + \Phi \operatorname{tg} \varepsilon')}{\Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon'' - \operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon''}.$$

Point principal image :

$$z'_{H'} = \frac{a \Phi \operatorname{tg} \varepsilon'}{\Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon'' - \operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon''}.$$

Distance focale :

$$F' = \frac{a}{\Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon'' - \operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon''}$$

(positive si le système est convergent).

Au point ζ de l'espace objet correspond le point ζ'_2 de l'espace image tel que :

$$(140) \quad -\frac{\zeta'_2}{a} = \frac{-\Phi + (1 + \Phi \operatorname{tg} \varepsilon')\zeta a^{-1}}{-(1 - \Phi \operatorname{tg} \varepsilon'') + (\operatorname{tg} \varepsilon' - \operatorname{tg} \varepsilon'' - \Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon'')\zeta a^{-1}}.$$

Pour qu'un point soit stigmatique, il faut que $\zeta'_1 = \zeta'_2$ d'où une équation du second degré en ζ . Un calcul simple montre que cette équation ne peut pas devenir une identité, sauf dans le cas sans intérêt $\Phi = 0$; il n'y a donc pas de systèmes gaussiques dans les dispositifs de Herzog. Mais il y a des points stigmatiques; la discussion de leur nombre et de leur caractère réel ou virtuel est compliquée. Nous nous bornerons à donner un exemple de montage symétrique. Prenons :

$$(141) \quad \varepsilon'' = -\varepsilon' = \varepsilon \quad \zeta = -a \cotg \varepsilon$$

on trouve :

$$(142) \quad \zeta'_1 = \zeta'_2 = -\zeta = a \cotg \varepsilon$$

pourvu que :

$$(143) \quad \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = 2 \operatorname{tg} \varepsilon$$

et on voit que ζ et son conjugué sont tous deux réels, si ε est positif.

Les montages de spectrographie utilisant les points stigmatiques participent des avantages décrits page 34. Il va sans dire que si le champ magnétique est précédé d'un champ électrique, c'est l'ensemble qu'il convient de rendre stigmatique, mais il n'y a là aucune difficulté.

On pourrait même songer à utiliser des montages analogues pour focaliser des trajectoires de corpuscules légers et rapides, puisque le rayon a du cercle décrit dans un champ uniforme de 5 000 gauss est 1 cm. pour les électrons de 1 mégavolt, 30 cm. pour des protons de la même énergie. La présence d'aberrations du second ordre est très acceptable s'il s'agit simplement de concentrer des corpuscules. La dispersion, c'est-à-dire le fait que dans ces montages, des corpuscules d'énergie un peu différente ont des trajectoires bien séparées peut être, selon les cas, un avantage ou un inconvénient.

IV. — Calcul des aberrations et de la dispersion des systèmes orthogonaux.

La solution du chapitre III n'est valable que pour des corpuscules monocinétiques ; de plus, elle est approximative, puisque dans L et H nous avons négligé les termes de degré supérieur à deux. Cherchons à tenir compte des termes de degré plus élevé, ainsi que des écarts dus à une petite différence de masse ou de vitesse entre les corpuscules que nous considérons ; cette différence, que nous représenterons par le paramètre ϵ introduira des termes nouveaux dans le hamiltonien H. Décomposons H en deux parties, l'une H^0 qui contient les termes $H_0 + H_1 + H_2$ du problème que nous avons étudié, l'autre $H^*(z, x, y, p, q, \epsilon)$.

Effectuons la transformation caractérisée par les formules :

$$(144) \quad \begin{cases} x = C_1 u + C_2 v & y = \Gamma_1 w + \Gamma_2 t \\ p = nC_1 u' + nC_2 v' & q = n\Gamma_1 w' + n\Gamma_2 t' \end{cases}$$

$C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ sont de nouvelles variables, u, v, w, t sont des fonctions de z , solutions des équations différentielles du problème d'approximation de Gauss caractérisé par H^0 , vérifiant les relations :

$$(145) \quad \begin{cases} n(vu' - uv') = 1 \\ n(wt' - tw') = 1. \end{cases}$$

Cette transformation est canonique, puisque les crochets de Lagrange (C_1, C_2) et (Γ_1, Γ_2) sont égaux à l'unité, et $(C_1, \Gamma_1), (C_2, \Gamma_1), (C_1, \Gamma_2), (C_2, \Gamma_2)$ sont nuls.

Donc C_1 et C_2 satisferont à des équations de la forme :

$$(146) \quad \begin{cases} \frac{dC_1}{dz} = \frac{\partial K}{\partial C_2} & \frac{dC_2}{dz} = -\frac{\partial K}{\partial C_1} \\ \frac{d\Gamma_1}{dz} = \frac{\partial K}{\partial \Gamma_2} & \frac{d\Gamma_2}{dz} = -\frac{\partial K}{\partial \Gamma_1} \end{cases}$$

K est un nouvel hamiltonien défini par :

$$(147) \quad \begin{cases} K(C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, z, \varepsilon) \\ = H(z, x, y, p, q, \varepsilon) + \frac{d}{dz} \Phi(C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, z). \end{cases}$$

Nous n'avons pas besoin de connaître la fonction Φ , car si nous réduisons H à H^0 , les équations (146) admettraient pour solutions $C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ des constantes ; donc :

$$H^0(z, x, y, p, q) + \frac{d}{dz} \Phi(C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, z)$$

est simplement une fonction de z , que nous pouvons supposer nulle sans inconvénient, puisqu'elle est destinée à disparaître des équations (146). Il reste donc :

$$(148) \quad K(C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, z, \varepsilon) = H^*(z, x, y, p, q, \varepsilon).$$

Or :

$$(149) \quad \begin{cases} H^*(z, x, y, p, q, \varepsilon) = H_0(\bar{z}, \varepsilon) - H_0(z, 0) + H_1(z, x, y, \varepsilon) \\ \quad - H_1(z, x, y, 0) + H_2(z, x, y, p, q, \varepsilon) \\ \quad - H_2(z, x, y, p, q, 0) + \sum_{\nu \geq 2} H_\nu(z, x, p, q, \varepsilon). \end{cases}$$

En tenant compte des simplifications introduites par la symétrie dans les formules (29) (43) (49) et en négligeant les corrections de relativité, nous trouvons :

$$(150) \left\{ \begin{array}{l} H_0(z, \varepsilon) = -n(z, \varepsilon) - e\lambda(z) \\ H_1(z, \varepsilon) = g(z, \varepsilon)x \\ H_2(z, \varepsilon) = -f(z, \varepsilon) \frac{x^2}{2} - s(z, \varepsilon) \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2n(z, \varepsilon)} (p^2 + q^2) \\ H_3(z, \varepsilon) = \frac{1}{6} (-a_{111} + 3\theta a_1 + ek_{11})x^3 + \frac{1}{2} (-a_{122} \\ \quad + \theta a_{22} - eh_{12})xy^2 - \frac{a_1 + n\theta}{2n^2} x(p^2 + q^2) - \frac{el_2}{2n} py^2 \\ \quad = \frac{1}{6} [Bx^3 + 3Gxy^2 + 3An^{-2}xp^2 + 3An^{-2}xq^2 + 3Dn^{-1}py^2] \end{array} \right.$$

avec :

$$(151) \left\{ \begin{array}{l} g(z, \varepsilon) = b_1 men^{-1} + n\theta + ek_0 \\ f(z, \varepsilon) = -ek_1 + men^{-1}(2\theta b_1 - b_{11}) + m^2 e^2 n^{-3} b_1^2 \\ s(z, \varepsilon) = eh_2 + b_{22} men^{-1} \end{array} \right.$$

$g(z, 0) = 0$ puisque la courbe **C** est une trajectoire :

$$(152) \left\{ \begin{array}{l} A = -\theta n + men^{-1}b_1 \\ B = ek_{11} - men^{-1}(3\theta b_{11} - b_{111}) \\ \quad - 3m^2 e^2 n^{-3}(\theta b_1^2 - b_1 b_{11}) + 3m^3 e^3 n^{-5} b_1^3 \\ D = -el_2 \\ G = -eh_{12} - men^{-1}(\theta b_{22} - b_{122}) + m^2 e^2 n^{-3} b_1 b_{22} \end{array} \right.$$

Les relations (101) et (102) permettent d'exprimer h_2, l_2, h_{12} au moyen de k_0, k_1, k_{11} ou de $H_y^0, \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}\right)_0$, c'est-à-dire des coefficients du développement selon les puissances de x , de la composante (tensorielle A_{xx} ou vectorielle H_y) du champ magnétique relative à la coordonnée y .

$$(153) \left\{ \begin{array}{l} h_2 = k_1 + k_0\theta = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_0 \quad l_2 = k'_0 = \frac{dH_y^0}{dx} \\ h_{12} = k_{11} + k_1\theta + k_0\theta^2 = \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}\right)_0 - \theta \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_0 \\ k_{11} = \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}\right)_0 - 2\theta \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_0 \end{array} \right.$$

Si on représente la charge d'espace par la formule (93) la condition (94) entraîne :

$$(154) \quad \begin{cases} b_{11} + b_{22} - \theta b_1 + V_0'' = -4\pi c^2 \rho_0 \\ -2\theta b_{11} - \theta b_{22} + \theta V_0'' + b_{111} + b_{122} + b_1'' = 4\pi c^2 (\rho_0 \theta - \rho_1) \end{cases}$$

Ainsi pour calculer A , B , D , G , si nous négligeons la charge d'espace, *il nous suffit de connaître la grandeur électrique b_{111} et la grandeur magnétique k_{11}* , en plus des quantités V_0 , b_1 , b_{11} , k_0 , k_1 qui interviennent dans l'approximation de Gauss.

Dans la formule (149) nous pouvons laisser de côté H_0 qui disparaît des équations de Hamilton ; regardons ε comme un infiniment petit, développons H_1 jusqu'aux termes en ε^2 , H_2 jusqu'aux termes en ε , et négligeons ε dans H_3 :

$$(155) \quad \begin{cases} H_1(z, \varepsilon) - H_1(z, 0) = \varepsilon x \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right)_0 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2} \right)_0 + \dots \\ H_2(z, \varepsilon) - H_2(z, 0) \\ = -\frac{1}{2} \varepsilon x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_0 - \frac{1}{2} \varepsilon y^2 \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_0 - \frac{\varepsilon}{2n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right)_0 (p^2 + q^2) \end{cases}$$

La valeur de $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}$ dépend de la signification du paramètre ε .

Si les particules sont toutes de même espèce, et si ε représente une vitesse :

$$(156) \quad \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = m \\ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} = m(-mn^{-2}eb_1 + \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = mn^{-2}[me(b_{11} - 2\theta b_1) + 3m^2n^{-2}e^2b_1^2] \\ \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = -m^2n^{-2}eb_{22} \end{cases}$$

Si les particules sont toutes de même espèce, et si ε représente une énergie, les valeurs ci-dessus sont simplement à diviser par n .

Si les particules sont d'espèce différente, et d'énergie et de charges identiques on doit prendre $\varepsilon = m$. Alors :

$$(157) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{2} n m^{-1} \\ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{2} [n \theta m^{-1} + e b_1 n^{-1}] \\ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{2} e n^{-1} [-b_{11} + 2 \theta b_1] + m^2 e^2 n^{-2} b_1^2 \\ \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{2} e b_{22} n^{-1} \end{aligned} \right.$$

Il nous reste à calculer K. Nous trouvons :

$$(158) \left\{ \begin{aligned} &K(C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, z, \varepsilon) \\ &= \omega_1 \varepsilon C_1 + \omega_2 \varepsilon C_2 + \frac{1}{2} (\varpi_1 \varepsilon^2 C_1 + \varpi_2 \varepsilon^2 C_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda_{11} \varepsilon C_1^2 + 2 \lambda_{12} \varepsilon C_1 C_2 + \lambda_{22} \varepsilon C_2^2 \\ &\quad + \mu_{11} \varepsilon \Gamma_1^2 + 2 \mu_{12} \varepsilon \Gamma_1 \Gamma_2 + \mu_{22} \varepsilon \Gamma_2^2) \\ &\quad + \frac{1}{6} (\alpha_{11} C_1^3 + 3 \alpha_{12} C_1^2 C_2 + 3 \alpha_{21} C_1 C_2^2 + \alpha_{22} C_2^3) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\beta_{11} C_1 \Gamma_1^2 + \beta_{12} C_1 \Gamma_2^2 + \beta_{21} C_2 \Gamma_1^2 + \beta_{22} C_2 \Gamma_2^2) \\ &\quad + \gamma_1 C_1 \Gamma_1 \Gamma_2 + \gamma_2 C_2 \Gamma_1 \Gamma_2 + Q(C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, z, \varepsilon). \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(159) \quad \omega_1 = u \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \quad \omega_2 = v \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \quad \varpi_1 = u \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2} \quad \varpi_2 = v \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}$$

$$(160) \left\{ \begin{aligned} \lambda_{11} &= -u^2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - u'^2 n^{-2} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} & \mu_{11} &= -w^2 \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} - w'^2 n^{-2} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \\ \lambda_{12} &= -uv \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - u'v' n^{-2} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} & \mu_{12} &= -wt \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} - w't' n^{-2} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \\ \lambda_{22} &= -v^2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - v'^2 n^{-2} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} & \mu_{22} &= -t^2 \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} - t'^2 n^{-2} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right.$$

$$(161) \left\{ \begin{aligned} \alpha_{11} &= 3Auu'^2 + Bu^3 \\ \alpha_{21} &= A(uv'^2 + 2vu'v') + Buv^2 \\ \alpha_{12} &= A(2uu'v' + vu'^2) + Bu^2v \\ \alpha_{22} &= 3Avv'^2 + Bv^3 \\ \beta_{11} &= Guw^2 + Auw'^2 + Du'w^2 \\ \beta_{21} &= Gvw^2 + Avw'^2 + Dv'w^2 \\ \beta_{12} &= Gut^2 + Aut'^2 + Du't^2 \\ \beta_{22} &= Gvt^2 + Avt'^2 + Dv't^2 \\ \gamma_1 &= Guwt + Auw't' + Du'wt \\ \gamma_2 &= Gvwt + Avw't' + Dv'wt \end{aligned} \right.$$

$Q(C_i, \Gamma_i, \varepsilon)$ désigne les termes de degré 4 et plus par rapport à l'ensemble des lettres ε, C, Γ dont nous nous rappellerons l'existence, pour éviter de pousser les calculs d'approximation ci-dessous, plus loin qu'il n'est légitime.

Dans K, les termes en ω_1 et ω_2 sont du second degré; les autres du troisième degré. Les termes en ω_1 et ω_2 sont les termes de dispersion, dont l'étude peut rentrer dans le cadre de l'approximation de Gauss.

Ecrivons les équations canoniques avec les variables C et Γ :

$$(162) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_1}{dz} = \omega_2 \varepsilon + \varepsilon(\lambda_{12} C_1 + \lambda_{22} C_2) + \frac{\varepsilon^2}{2} \varpi_2 \\ \quad + \frac{1}{2} (\alpha_{12} C_1^2 + 2\alpha_{21} C_1 C_2 + \alpha_{22} C_2^2 + \beta_{21} \Gamma_1^2 + \beta_{22} \Gamma_2^2 + 2\gamma_2 \Gamma_1 \Gamma_2) \\ \frac{dC_2}{dz} = -\omega_1 \varepsilon - \varepsilon(\lambda_{11} C_1 + \lambda_{12} C_2) - \frac{\varepsilon^2}{2} \varpi_1 \\ \quad - \frac{1}{2} (\alpha_{11} C_1^2 + 2\alpha_{12} C_1 C_2 + \alpha_{21} C_2^2 + \beta_{11} \Gamma_1^2 + \beta_{12} \Gamma_2^2 + 2\gamma_1 \Gamma_1 \Gamma_2) \\ \frac{d\Gamma_1}{dz} = \mu_{12} \varepsilon \Gamma_1 + \mu_{22} \varepsilon \Gamma_2 + \beta_{12} C_1 \Gamma_2 + \beta_{22} C_2 \Gamma_2 \\ \quad + \gamma_1 C_1 \Gamma_1 + \gamma_2 C_2 \Gamma_1 \\ \frac{d\Gamma_2}{dz} = -\mu_{11} \varepsilon \Gamma_1 - \mu_{12} \varepsilon \Gamma_2 - \beta_{11} C_1 \Gamma_1 - \beta_{21} C_2 \Gamma_1 \\ \quad - \gamma_1 C_1 \Gamma_2 - \gamma_2 C_2 \Gamma_2 \end{array} \right.$$

Cherchons la solution de ce système qui satisfait aux conditions initiales :

$$(163) \quad C_1(a) = \xi_1 \quad C_2(b) = \xi_2 \quad \Gamma_1(a) = \eta_1 \quad \Gamma_2(b) = \eta_2$$

sous forme d'un développement en série selon les puissances de $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$. Elle nous est donnée immédiatement par une méthode d'approximations successives. Nous aurons la solution de première approximation en ne tenant compte que des termes du premier degré (en ω_1 et ω_2) du second membre :

$$(163) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1(z) = \xi_1 + \varepsilon \varphi_1(z) \\ \Gamma_1 = \eta_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_2(z) = \xi_2 + \varepsilon \varphi_2(z) \\ \Gamma_2 = \eta_2 \end{array} \right.$$

en posant :

$$(165) \quad \varphi_1 = \int_a^z \omega_2 dz; \quad \varphi_2 = - \int_a^z \omega_1 dz.$$

Puis en substituant ces expressions dans le second membre, nous avons la solution de deuxième approximation :

$$(166) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1(z) &= \xi_1 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon \xi_1 \int_a^z (\lambda_{12} + \varphi_1 \alpha_{12} + \varphi_2 \alpha_{21}) dz \\ &+ \varepsilon \xi_2 \int_a^z (\lambda_{22} + \varphi_1 \alpha_{21} + \varphi_2 \alpha_{22}) dz \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_a^z (\varpi_2 + 2\lambda_{12}\varphi_1 + 2\lambda_{22}\varphi_2 + \alpha_{12}\varphi_1^2 + 2\alpha_{21}\varphi_1\varphi_2 + \alpha_{22}\varphi_2^2) dz \\ &+ \frac{\xi_1^2}{2} \int_a^z \alpha_{12} dz + \xi_1 \xi_2 \int_a^z \alpha_{21} dz + \frac{\xi_2^2}{2} \int_a^z \alpha_{22} dz \\ &+ \frac{\eta_1^2}{2} \int_a^z \beta_{21} dz + \frac{\eta_2^2}{2} \int_a^z \beta_{22} dz + \eta_1 \eta_2 \int_a^z \gamma_2 dz \\ \Gamma_1(z) &= \eta_1 + \varepsilon \eta_1 \int_a^z \mu_{12} dz + \varepsilon \eta_2 \int_a^z \mu_{22} dz \\ &+ \xi_1 \eta_2 \int_a^z \beta_{12} dz + \xi_2 \eta_2 \int_a^z \beta_{22} dz + \xi_1 \eta_1 \int_a^z \gamma_1 dz \\ &+ \xi_2 \eta_1 \int_a^z \gamma_2 dz. \end{aligned} \right.$$

Pour $C_2(z)$ et $\Gamma_2(z)$ on aurait des formules analogues ; la limite inférieure des intégrations serait b .

En abrégé nous écrirons :

$$(167) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1(z) &= \xi_1 + \varepsilon \varphi_1 + A_{00} \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_i A_{0i} \varepsilon \xi_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k} (A_{ik} \xi_i \xi_k + E_{ik} \eta_i \eta_k) \end{aligned} \right.$$

avec la convention :

$$A_{ik} = A_{ki}, \quad E_{ik} = E_{ki}$$

$$(168) \quad \Gamma_1(z) = \eta_1 + \sum_i C_{0i} \varepsilon \eta_i + \sum_{i,k} C_{ik} \xi_i \eta_k$$

ou plus simplement :

$$(169) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1(z) &= \xi_1 + \varepsilon \varphi_1 + \Delta \xi_1 & C_2 &= \xi_2 + \varepsilon \varphi_2 + \Delta \xi_2 \\ \Gamma_1(z) &= \eta_1 + \Delta \eta_1 & \Gamma_2 &= \eta_2 + \Delta \eta_2 \end{aligned} \right.$$

A cause de $Q(z, \varepsilon, C_i, \Gamma_i)$, il serait illusoire de pousser plus loin les approximations sur le système (162); nous devons nous limiter aux termes du second degré; ils caractérisent les aberrations du second ordre.

Les quinze coefficients $A_{00}, A_{0i}, A_{ik}, E_{ik}, C_{0i}, C_{ik}$ sont des fonctions de z ; ils ne sont pas tous indépendants car :

$$(170) \quad \begin{cases} E_{22}(z) - C_{22}(z) = 0 \\ E_{42}(z) - C_{42}(z) = 0 \end{cases}$$

Il y a également dix relations du type :

$$(171) \quad A_{01}(z) + B_{02}(z) = \text{const.}$$

entre ces coefficients et les coefficients analogues $B_{00}, B_{0i}, B_{ik}, F_{ik}, D_{0i}, D_{ik}$ qui entreraient dans l'expression de $C_2(z)$ et de $\Gamma_2(z)$; nous ne les écrirons pas, car nous n'aurons pas à les utiliser.

2. Disposition des trajectoires au voisinage d'un foyer. — Nous pouvons maintenant donner une solution plus exacte du problème suivant : soit un diaphragme, un écran et une source placés respectivement dans les plans $z = D$, $z = E$ et $z = S$ perpendiculaires à la courbe $x = y = 0$ qui représente la trajectoire moyenne ($\varepsilon = 0$); une autre trajectoire part du point x_1, y_1 de la source, traverse le diaphragme au point x_2, y_2 ; quelles sont en fonction de ces données et de ε , les coordonnées x_e, y_e du point d'impact de cette trajectoire sur l'écran? Cette trajectoire a pour équation :

$$(172) \quad \begin{cases} x(z) = u(z)C_1(\xi_j, \eta_k, z, \varepsilon) + v(z)C_2(\xi_j, \eta_k, z, \varepsilon) \\ y(z) = w(z)\Gamma_1(\xi_j, \eta_k, z, \varepsilon) + t(z)\Gamma_2(\xi_j, \eta_k, z, \varepsilon) \end{cases}$$

Supposons a et b , et les fonctions u et v choisis de façon que $a = S$, $b = D$, et que $u(b) = w(b) = v(a) = t(a) = 0$. Alors :

$$(173) \quad \begin{cases} x_1 = u(a)\xi_1 & y_1 = w(a)\eta_1 \\ x_2 = v(b)\xi_2 & y_2 = t(b)\eta_2 \end{cases}$$

On peut regarder $u(a)$ et $w(a)$ comme des unités naturelles de longueur dans le plan $z = S$ et $v(b)$ et $t(b)$ comme des unités naturelles de longueur dans le plan $z = D$; nous aurons immédiatement x_e, y_e en substituant dans la formule (172) :

$$x = E, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{u(a)}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{w(a)}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{v(b)}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{t(b)}.$$

Les expressions obtenues sont équivalentes à celles que j'ai déjà publiées ⁽¹⁾ : elles sont toutefois un peu plus simples.

En particulier plaçons l'écran dans le plan $z = I$, conjugué du plan $z = a$ dans la première section principale; alors $v(I) = 0$.

$$(174) \quad \begin{cases} x(I) = u(I)C_1(I) \\ y(I) = w(I)\Gamma_1(I) + t(I)\Gamma_2(I) \end{cases}$$

Si on regarde $u(I)$ et $w(I)$ comme des unités naturelles de longueur dans le plan image, on peut remplacer $x(I)$ et $y(I)$ par les coordonnées réduites :

$$(175 a) \quad \xi_1 = \xi_1 + \varepsilon\varphi_1(I) + \Delta\xi_1 = C_1(I)$$

$$(175 b) \quad \eta_1 = \eta_1 + \frac{t(I)}{w(I)} \eta_2 + (\Delta\eta_1 + \frac{t(I)}{u(I)} \Delta\eta_2).$$

Dans le plan $z = J$ conjugué du plan $z = a$ dans la deuxième section principale, on aurait $t(J) = 0$:

$$(176) \quad \begin{cases} x(J) = u(J)C_1(J) + v(J)C_2(J) \\ y(J) = w(J)\Gamma_1(J) \end{cases}$$

Si on regarde $u(J)$ et $w(J)$ comme des unités naturelles de longueur dans le plan $z = J$, on peut remplacer $x(J)$, $y(J)$ par les coordonnées réduites :

$$(177 a) \quad \xi_J = \xi_1 + \varepsilon\varphi_1(J) + \frac{v(J)}{u(J)} [\xi_2 + \varepsilon\varphi_2(J)] + \Delta\xi_1 + \frac{v(J)}{u(J)} \Delta\xi_2$$

$$(177 b) \quad \eta_J = \eta_1 + \Delta\eta_1$$

(1) M. COTTE. *Comptes rendus*, **205** (1937), 1145.

3. Influence d'un déplacement de diaphragme sur les aberrations. — Il est intéressant d'étudier l'influence du déplacement du diaphragme sur les aberrations ; nous laissons l'objet en place ($S = a$), nous déplaçons le diaphragme ($D \neq b$) *sans modifier les champs* ⁽¹⁾, et nous étudions ce qui en résulte dans le plan $z = l$ pour les aberrations de la coordonnée x . Gardons les mêmes fonctions $u(z)$, $v(z)$, $w(z)$, $t(z)$, nulles pour $z = a$ ou $z = b$. Il suffit d'écrire :

$$(178) \quad x_1 = u(a)\xi_1 \quad y_1 = w(a)\eta_1$$

de résoudre en ξ_2 et η_2 les équations :

$$(179) \quad \begin{cases} x_2 = u(D)[\xi_1 + \varepsilon\varphi_1 + \Delta\xi_1]_D + v(D)[\xi_2 + \varepsilon\varphi_2 + \Delta\xi_2]_D \\ y_2 = w(D)[\eta_1 + \Delta\eta_1]_D + t(D)[\eta_2 + \Delta\eta_2]_D \end{cases}$$

et de porter la solution dans la formule (175 a).

Puisque ξ_2 et η_2 dans cette formule n'interviennent que dans $\Delta\xi_1$, c'est-à-dire dans les termes du second degré, il suffit de tirer de (179) la partie principale de ξ_2 et η_2 en négligeant $\Delta\xi_1$, $\Delta\xi_2$, $\Delta\eta_1$, $\Delta\eta_2$.

$$(180) \quad \begin{cases} \xi_2 = \frac{x_2 - u(D)\xi_1}{v(D)} + \varepsilon\Lambda \\ \eta_2 = \frac{y_2 - w(D)\eta_1}{t(D)} \end{cases}$$

avec :

$$(181) \quad \Lambda = - \frac{u(D)\varphi_1(D) + v(D)\varphi_2(D)}{v(D)}.$$

En substituant dans (175 a) et en reclassant les termes, nous obtenons :

$$(182) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 + \varepsilon\varphi_1 + \bar{A}_{00} \frac{\varepsilon^2}{2} + \bar{A}_{01}\varepsilon\xi_1 + \bar{A}_{02}\varepsilon \frac{x_2}{v_D} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\bar{A}_{11}\xi_1^2 + 2\bar{A}_{12}\xi_1 \frac{x_2}{v_D} + \bar{A}_{22} \left(\frac{x_2}{v_D} \right)^2 \right. \\ &\left. + \bar{E}_{11}\eta_1^2 + 2\bar{E}_{12}\eta_1 \frac{y_2}{t_D} + \bar{E}_{22} \left(\frac{y_2}{t_D} \right)^2 \right] \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Cette opération ne peut guère se faire sans modifier les champs qu'à l'intérieur d'une région où le champ électrique est nul.

avec :

$$\begin{aligned}
 v_D &= v(D) & t_D &= t(D) \\
 (183) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 \bar{A}_{00} &= A_{00} + 2\Lambda A_{02} + \Lambda^2 A_{22} \\
 \bar{A}_{01} &= A_{01} - \frac{u_D}{v_D} A_{02} + \Lambda A_{12} - \Lambda \frac{u_D}{v_D} A_{22} \\
 \bar{A}_{02} &= A_{02} + \Lambda A_{22} \\
 A_{11} &= A_{11} - 2A_{12} \frac{u_D}{v_D} + A_{22} \frac{u_D^2}{v_D^2} \\
 \bar{A}_{12} &= A_{12} - A_{22} \frac{u_D}{v_D} \\
 A_{22} &= A_{22} \\
 E_{11} &= E_{11} - 2E_{12} \frac{w_D}{t_D} + E_{22} \frac{w_D^2}{t_D^2} \\
 \bar{E}_{12} &= E_{12} - \frac{w_D}{t_D} E_{22} \\
 \bar{E}_{22} &= E_{22}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Nous terminerons ces considérations par deux remarques :

Tout d'abord, il n'est pas nécessaire que les trajectoires soient limitées en projection sur les surfaces $x=0$ ou $y=0$ par le même diaphragme; on peut très bien imaginer une fente allongée perpendiculairement au plan $y=0$ placée au point $z=D_1$ et une fente allongée perpendiculairement à la surface $x=0$ placée au point $z=D_2$. Les modifications à faire subir dans ce cas à nos calculs sont évidentes; il n'y aura aucune difficulté à prendre une fonction $u(z)$ nulle pour $z=D_1$, et une fonction $w(z)$ nulle pour $z=D_2$; pour un déplacement de ces diaphragmes, les résultats restent simples, parce que dans $C_1(I)$ les aberrations se divisent en deux groupes ($\xi_i \xi_k$ et $\eta_i \eta_k$). D'autre part, si on voulait étudier comment un déplacement du diaphragme modifie les coordonnées $x(z)$ des traces des trajectoires sur un plan qui ne serait plus $z=I$ le calcul se compliquerait; il faudrait pousser la résolution de (179) jusqu'aux termes du second

degré; il faudrait en outre étudier l'influence de l'inclinaison des diaphragmes sur la trajectoire moyenne ⁽¹⁾; dans le cas que nous avons traité, cette étude est inutile, car elle nous donnerait des termes de l'ordre de grandeur de ceux que nous négligeons.

4. Influence de l'inclinaison de l'écran sur les aberrations.

— Nous avons vu que les plans $z = \text{const.}$ ne sont aucunement privilégiés. Etudions donc les points d'impact d'une trajectoire sur une surface normale au plan de symétrie, dont l'équation en coordonnées curvilignes est :

$$(184) \quad x = k\zeta + \gamma\zeta^2$$

si nous posons :

$$\zeta = z - I.$$

Au voisinage du point $z = I$, nous pouvons écrire en prenant le point $(0, 0, I)$ comme origine :

$$(185) \quad x(\zeta) = x(I) + \zeta x'(I) + \frac{1}{2} \zeta^2 x''(I)$$

Or :

$$(186) \quad \begin{cases} x(I) = C_1(I)u(I) \\ x'(I) = C_1(I)u'(I) + C_2(I)v'(I) + C_4'(I)u(I) \end{cases}$$

La solution commune aux équations (184) (185) se présente sous forme de développements :

$$(187) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= u(I) \left[\xi_1 + \varepsilon\varphi_1 + d_{00} \frac{\varepsilon^2}{2} + d_{01}\varepsilon\xi_1 + d_{02}\varepsilon\xi_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (d_{11}\xi_1^2 + 2d_{12}\xi_1\xi_2 + d_{22}\xi_2^2 + \Sigma e_{ik}\eta_i\eta_k) \right] \\ \zeta &= \frac{u(I)}{k} \left[\xi_1 + \varepsilon\varphi_1 + \frac{1}{2} g_{00}\varepsilon^2 + g_{01}\varepsilon\xi_1 + g_{02}\varepsilon\xi_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Sigma g_{ik}\xi_i\xi_k + \frac{1}{2} \Sigma m_{ik}\eta_i\eta_k \right] \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Cf. un mémoire de HERZBERGER. *Z. Physik*, **74** (1932), 88, où est étudié un problème analogue d'optique géométrique.

dont nous obtiendrons les coefficients par une identification au cours de laquelle nous devons nous limiter aux termes du second ordre. Dans ces conditions on pourra dans (185) supprimer $\zeta^2 x''(I)$ et garder dans $x'(I)$ seulement les termes du premier ordre, c'est-à-dire :

$$(188) \quad [\xi_1 + \varepsilon \varphi_1(I)]u'(I) + [\xi_2 + \varepsilon \varphi_2(I)]v'(I)$$

Nous obtenons :

$$(189) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_{00} = A_{00} + 2k^{-1}(\varphi_1^2 u' + \varphi_1 \varphi_2 v') = g_{00} + 2k^{-2} \gamma u \varphi_1^2 \\ d_{01} = A_{01} + k^{-1}(2\varphi_1 u' + \varphi_2 v') = g_{01} + 2k^{-2} \gamma u \varphi_1 \\ d_{02} = A_{02} + k^{-1} \varphi_1 v' = g_{02} \\ d_{11} = A_{11} + 2k^{-1} u' = g_{11} + 2k^{-2} \gamma u \\ d_{12} = A_{12} + k^{-1} v' = g_{12} \\ d_{22} = A_{22} = g_{22} \\ e_{ik} = E_{ik} = m_{ik} \end{array} \right.$$

Nous appliquerons ces formules au cas où l'écran est un plan qui fait au point $(0, 0, I)$ un angle Φ avec la courbe C.

Si on considère le trièdre cartésien $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tangent aux lignes coordonnées au point $(0, 0, I)$, il y a entre coordonnées cartésiennes X, Y, Z et coordonnées curvilignes x, y, ζ les relations :

$$(190) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = x + \frac{1}{2} \theta \zeta^2 \\ Y = y \\ Z = \zeta - \theta x \zeta \end{array} \right.$$

Si bien qu'à l'équation $X = Z \operatorname{tg} \Phi$ correspond l'équation en coordonnées curvilignes :

$$(191) \quad x = z \operatorname{tg} \Phi - \frac{1}{2} \theta z^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \Phi) + \dots$$

d'où on déduit :

$$(192) \quad k = \operatorname{tg} \Phi \quad \gamma = -\frac{\theta}{2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \Phi)$$

On peut représenter un point du plan de l'écran par ses

coordonnées cartésiennes $\Xi = \frac{X}{\sin \Phi}$ et Y , par rapport à deux axes rectangulaires pris dans le plan. Au lieu de Ξ et de X nous utiliserons les coordonnées réduites :

$$(193) \quad \xi_1 = \frac{X}{u} = \frac{\Xi}{u \sin \Phi} \quad \eta_1 = \frac{y}{w} = \frac{Y}{w}$$

Un calcul simple donne :

$$(194) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 + \varepsilon \varphi_1 + A_{00}^* \frac{\varepsilon^2}{2} + A_{01}^* \varepsilon \xi_1 + A_{02}^* \varepsilon \xi_2 \\ &+ \frac{1}{2} (A_{11}^* \xi_1^2 + 2A_{12}^* \xi_1 \xi_2 + A_{22}^* \xi_2^2 + \Sigma E_{ik}^* \eta_i \eta_k) \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(195) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{00}^* &= A_{00} + 2(\varphi_1^2 u' + \varphi_1 \varphi_2 v') \cotg \Phi + \theta \varphi_1^2 u \cotg^2 \Phi \\ A_{01}^* &= A_{01} + (2\varphi_1 u' + \varphi_2 v') \cotg \Phi + \theta \varphi_1 u \cotg^2 \Phi \\ A_{02}^* &= A_{02} + \varphi_1 v' \cotg \Phi \\ A_{11}^* &= A_{11} + 2u' \cotg \Phi + \theta u \cotg^2 \Phi \\ A_{12}^* &= A_{12} + v' \cotg \Phi \\ A_{22}^* &= A_{22} \\ E_{22}^* &= E_{22} \end{aligned} \right.$$

Un calcul analogue permettrait de tenir compte du fait que les points de la source ne sont pas forcément situés dans un plan $z = \text{const.}$

5. Discussion des aberrations d'un faisceau de corpuscules homogène et monocinétique ⁽¹⁾. — Proposons-nous de chercher la signification des termes qui figurent au second membre des équations (174) à (177) lorsqu'on fait $\varepsilon = 0$. Nous utiliserons les coordonnées réduites, et nous poserons :

$$(196) \quad \rho_1 = \frac{t(1)}{w(1)} \quad \rho_2 = \frac{v(J)}{u(J)}$$

Les termes en A_{ik} , E_{ik} , B_{ik} , F_{ik} , C_{ik} , D_{ik} correspondent à des écarts par rapport à l'approximation de Gauss pour un

⁽¹⁾ Cf. H. FERZBERGER, *Z. Physik*, **74** (1932), 88.

faisceau de corpuscules monochromatique (homogène monochinétique) défini par $\varepsilon = 0$.

Deux cas sont à distinguer :

a) *L'astigmatisme est corrigé.* — Dans le cas où ρ_I (ou ρ_d) est nul (astigmatisme corrigé) les formules (175) se simplifient en :

$$(197) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_I = \xi_1 + \Delta\xi_1 \\ \eta_I = \eta_1 + \Delta\eta_1 \end{array} \right.$$

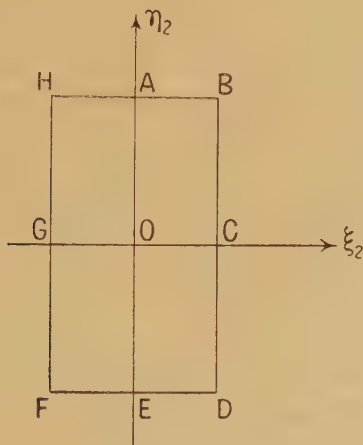


Fig. 2.

1° Les trajectoires définies par le centre de la source $\xi_1 = \eta_1 = 0$ et les points ξ_2, η_2 du diaphragme rencontrent l'écran aux points :

$$(198) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_I = \frac{1}{2} (A_{22}\xi_2^2 + E_{22}\eta_2^2) \\ \eta_I = C_{22}\xi_2\eta_2 \end{array} \right.$$

Imaginons un diaphragme rectangulaire ABCDEFGH de centre O, de côtés $2\xi_2, 2\eta_2$ (fig. 2). Au contour du diaphragme correspond dans le plan image un contour A'B'C'D'E'F'G'H' formé de deux arcs de parabole décrits deux fois. A une

homothétie de centre O, de rapport r du plan $\xi_2\eta_2$, correspond une homothétie de centre O' de rapport r^2 du plan $\xi_1;\eta_1$. On se rend compte ainsi de la correspondance des éléments de surface de ces deux plans. Deux cas de figure (fig. 2a, fig. 2b) sont possibles selon le signe de $E_{22}A_{22}$. On a :

$$B'D' = 2C_{22}\xi_2\eta_2 \quad O'A' = \frac{1}{2}E_{22}\eta_2^2 \quad O'C' = \frac{1}{2}A_{22}\xi_2^2;$$

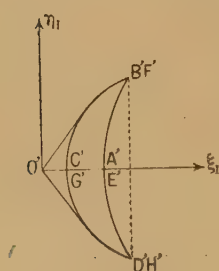


Fig. 2 a.

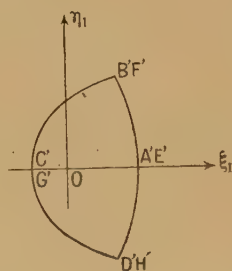


Fig. 2 b.

2° Les trajectoires passant par le centre du diaphragme ($\xi_2 = \eta_2 = 0$) donnent de la source une image nette, mais déformée, définie par les équations :

$$(199) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}(A_{11}\xi_1^2 + E_{11}\eta_1^2) \\ \eta_1 = \eta_1 + C_{11}\xi_1\eta_1 \end{array} \right.$$

A un rectangle ABCDEFGH de centre O correspond un quadrilatère curviligne A'B'C'D'E'F'G'H' (fig. 3); les côtés sont des arcs de parabole, dont les axes sont dans le plan de symétrie ou parallèles au plan de symétrie.

A_{11} , E_{11} , C_{11} s'interprètent comme écarts entre coordonnées réduites :

$$GG' = CC' = \frac{1}{2}A_{11}\xi_1^2 \quad AA' = \frac{1}{2}E_{11}\eta_1^2$$

$$B'D' - BD = HF - H'F' = 2C_{11}\xi_1\eta_1.$$

3° Pour interpréter A_{12} , E_{12} , C_{12} , C_{21} , nous supposons qu'on ait annulé A_{22} , E_{22} , C_{22} . Alors :

$$(200) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_1 + \frac{1}{2} (A_{11}\xi_1^2 + E_{11}\eta_1^2) + A_{12}\xi_1\xi_2 + E_{12}\eta_1\eta_2 \\ \eta_1 = \eta_1 + C_{11}\xi_1\eta_1 + C_{21}\xi_2\eta_1 + C_{12}\xi_1\eta_2. \end{array} \right.$$

Tout point de l'objet autre que O aura pour image non un point, mais un petit parallélogramme dont le centre est défini par (199) et dont les côtés ont pour longueur :

$$(201) \quad \xi_2 \sqrt{A_{12}^2 \xi_1^2 + C_{21}^2 \eta_1^2} \quad \text{et} \quad \eta_2 \sqrt{C_{12}^2 \xi_1^2 + E_{12}^2 \eta_1^2}$$

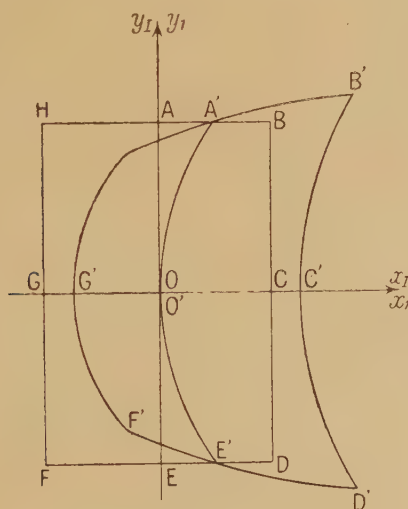


Fig. 3.

et font respectivement avec l'axe des ξ_1 les angles ψ et ψ' tels que :

$$(202) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{C_{21}\eta_1}{A_{12}\xi_1} \quad \operatorname{tg} \psi' = \frac{C_{12}\xi_1}{E_{12}\eta_1}$$

Les aberrations caractérisées par A_{12} , E_{12} , C_{12} , C_{21} , se traduisent donc par un manque de netteté de l'image.

b) *L'astigmatisme n'est pas corrigé* ($\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$). — Etudions d'abord les phénomènes pour $z = l$.

1° Les trajectoires définies par le centre de la source ($\xi_1 = \eta_1 = 0$) et le point $\xi_2 \eta_2$ du diaphragme (fig. 4) rencontrent l'écran au point :

$$(203) \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{2} A_{22} \xi_2^2 + \frac{1}{2} E_{22} \eta_2^2 \\ \eta_1 = \rho_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_2 (C_{22} + \rho_1 D_{22}) \end{cases}$$

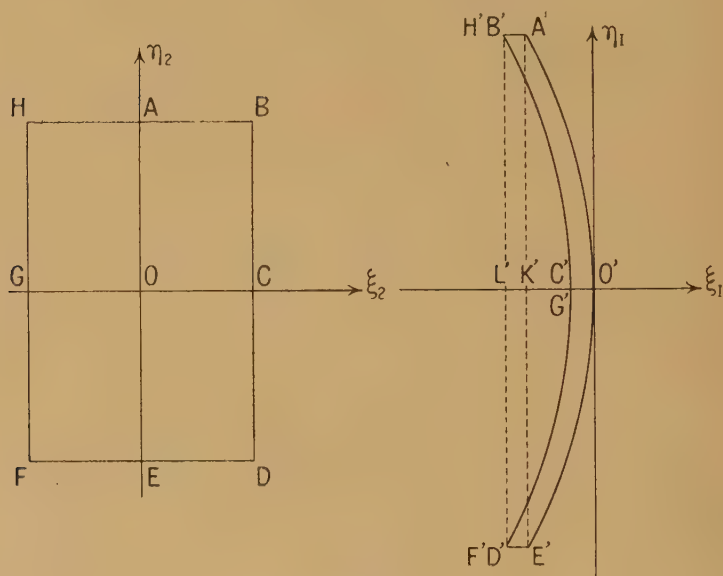


Fig. 4.

Nous supposons le diaphragme assez peu étendu pour que nous puissions négliger le terme $\xi_2 \eta_2$ devant η_2 . Dans ces conditions, à chacun des deux rectangles ABCDEOA, AHGFEOA qui composent le diaphragme (fig. 4) correspond la même aire du plan $\xi_1 \eta_1$ limitée à deux paraboles et à deux segments de droite. On a :

$$A'E' = B'D' = \rho_1 \eta_2 \quad O'C' = \frac{1}{2} A_{22} \xi_2^2$$

$$O'K' = C'L' = \frac{1}{2} E_{22} \eta_2^2$$

A'E' et B'D' sont beaucoup plus grands que O'C'; on a l'apparence d'une focale courbe, d'épaisseur constante, dont le bord A'O'E' reçoit beaucoup plus de corpuscules que l'autre bord.

2° Les trajectoires passant par le centre du diaphragme ($\xi_2 = \eta_2 = 0$) donnent une image nette mais déformée, définie par les équations :

$$(204) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_1 + \frac{1}{2} (A_{11}\xi_1^2 + E_{11}\eta_1^2) \\ \eta_1 = \eta_1 + \xi_1\eta_1(C_{11} + \rho_1 D_{11}) \end{array} \right.$$

L'apparence est la même que si l'astigmatisme est corrigé (fig. 3), mais C_{11} n'a plus une interprétation simple.

3° Supposons A_{22} , E_{22} , $(C_{22} + \rho_1 D_{22})$ nuls ; nous avons :

$$(205) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = (\xi_1 + \frac{1}{2} A_{11}\xi_1^2 + \frac{1}{2} E_{11}\eta_1^2) + A_{12}\xi_1\xi_2 + E_{12}\eta_1\eta_2 \\ \eta_1 = \eta_1 + (C_{11} + \rho_1 D_{11})\xi_1\eta_1 \\ \quad + C_{21} + \rho_1 D_{21})\xi_2\eta_1 + \rho_1\eta_2 + (C_{12} + \rho_1 D_{12})\xi_1\eta_2 \end{array} \right.$$

Au point $\xi_1\eta_1$ correspondra dans le plan ξ_1, η_1 un parallélogramme très allongé dont le centre est donné par (204). Quand le point ξ_1, η_1 varie, le grand côté de ce parallélogramme restera à peu près constant (voisin de $\rho_1\eta_2$) et il fera avec ξ_1 un angle toujours très voisin d'un angle droit.

Étudions maintenant les phénomènes pour $z = J$.

Ils seront définis par les coefficients A_{ik} , B_{ik} , etc., calculés pour $z = J$, donc différents des précédents, bien que nous gardions les mêmes notations.

1° Les trajectoires définies par le centre de la source ($\xi_1 = \eta_1 = 0$) et le point ξ_2, η_2 du diaphragme rencontrent l'écran au point :

$$(206) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_J = \rho_J \xi_2 + \frac{1}{2} (A_{22} + \rho_J B_{22})\xi_2^2 + \frac{1}{2} (E_{22} + \rho_J F_{22})\eta_2^2 \\ \eta_J = C_{22}\xi_2\eta_2 \end{array} \right.$$

Supposons le diaphragme assez peu étendu pour que les

termes du second ordre en ξ_2^2 et η_2^2 soient petits devant les termes du premier ordre en ξ_2 . Au rectangle ABCDEFGH correspondra sur l'écran une figure formée de deux triangles opposés par leur sommet O (fig. 5). Pour un diaphragme de côtés $2\xi_2$, $2\eta_2$, la longueur G'C' égale à $2\rho_2\xi_2$ sera supérieure à B'D' ou F'H' égaux à $C_{22}\xi_2\eta_2$.

Si on tient compte des termes en ξ_2^2 et η_2^2 , il correspondra au contour ABCDEFGH, une figure formée de deux triangles curvilignes. On aura l'apparence d'une focale droite, plus fine au centre que sur les bords.

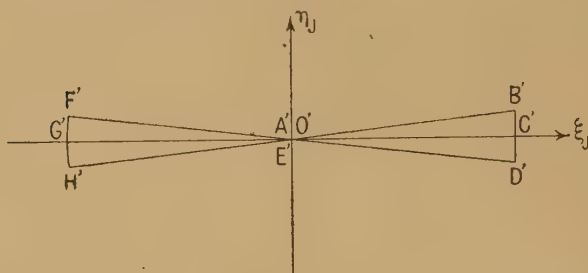


Fig. 5.

2° Les trajectoires passant par le centre du diaphragme ($\xi_2 = \eta_2 = 0$) donnent une image nette, mais déformée, définie par les équations :

$$(207) \quad \begin{cases} \xi_j = \xi_1 + \frac{1}{2} (A_{11} + \rho_j B_{11}) \xi_1^2 + \frac{1}{2} (E_{11} + \rho_j F_{11}) \eta_1^2 \\ \eta_j = \eta_1 + C_{11} \xi_1 \eta_1 \end{cases}$$

L'apparence est la même que si l'astigmatisme n'est pas corrigé, mais A_{11} et B_{11} n'ont plus d'interprétation simple.

3° Supposons $A_{22} + \rho_j B_{22}$, $E_{22} + \rho_j F_{22}$, C_{22} nuls ; nous avons :

$$(208) \quad \begin{cases} \xi_j = \xi_1 + \frac{1}{2} (A_{11} + \rho_j B_{11}) \xi_1^2 + \frac{1}{2} (E_{11} + \rho_j F_{11}) \eta_1^2 \\ \quad + \rho_j \xi_2 + (A_{12} + \rho_j B_{12}) \xi_1 \xi_2 + (E_{12} + \rho_j F_{12}) \eta_1 \eta_2 \\ \eta_j = \eta_1 + C_{11} \xi_1 \eta_1 + C_{21} \xi_2 \eta_1 + C_{12} \xi_1 \eta_2 \end{cases}$$

A tout point ξ_1, η_1 autre que O correspond un parallélogramme très allongé dont le centre est donné par (207). Quand le point ξ_1, η_1 varie, le grand côté de ce parallélogramme reste à peu près constant (voisin de $\rho_2 \xi_2$), et fait avec ξ_2 un angle toujours très petit.

6. Dispersion et aberrations chromatiques. — Pour interpréter les termes en ε et ε^2 , nous prendrons une trajectoire passant par le centre de l'objet ($\xi_1 = \eta_1 = 0$) et le centre du diaphragme ($\xi_2 = \eta_2 = 0$). Son point d'impact sur l'écran est :

$$(209) \quad \left| \begin{array}{l} x_e = (\varepsilon \varphi_1 + \frac{1}{2} A_{00} \varepsilon^2) u + (\varepsilon \varphi_2 + \frac{1}{2} B_{00} \varepsilon^2) v \\ y_e = 0 \end{array} \right.$$

Si nous plaçons l'écran au point $z = l$, $v(l) = 0$, nous avons immédiatement l'interprétation de φ_1 et de A_{00} ; en coordonnées réduites :

$$(210) \quad \xi_1 = \varepsilon \varphi_1 + A_{00} \frac{\varepsilon^2}{2}$$

donne la loi de dispersion au second ordre près en ε .

Les formules (183) et (195) montrent que A_{00} dépend de la position du diaphragme et de l'inclinaison de l'écran ; il n'en est pas de même de φ_1 , que nous pouvons appeler coefficient de dispersion, ou simplement la dispersion au point $z = l$. On obtient une condition suffisante de dispersion nulle, en écrivant :

$$(211) \quad \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Si ε représente une masse, les équations (211), (157) entraînent $H_y = 0$. Des particules de même énergie ont même trajectoire dans un champ électrique permanent ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Cf. BRÜCHE et SCHERZER. *Geometrische Elektronenoptik*, 84.

Si ε représente une vitesse, les équations (211), (156) entraînent :

$$(212) \quad eH_y + 2meb_1 = 0.$$

Ceci exprime que le champ magnétique et le champ électrique produisent des accélérations normales de sens contraire, et dans le rapport de 2 à 1. Cette condition était connue pour une trajectoire circulaire ⁽¹⁾. Elle est indépendante de cette hypothèse.

Supposons maintenant $\xi_1 = \eta_1 = 0$, mais ξ_2 et $\eta_2 \neq 0$, et occupons-nous seulement de ξ_1 :

$$(213) \quad \xi_1 = \varepsilon\varphi_1 + \frac{1}{2} A_{00}\varepsilon^2 + A_{02}\varepsilon\xi_2 + \frac{1}{2} A_{22}\xi_2^2 + \frac{1}{2} E_{22}\eta_2^2.$$

Le terme nouveau $A_{02}\varepsilon\xi_2$ provient de ce que les trajectoires caractérisées par ε ne sont plus focalisées dans le plan $z = I$, mais en avant ou en arrière de ce plan. Si on cherche la coordonnée z de l'intersection de deux trajectoires définies par la même valeur de ε et par une valeur de ξ_2 nulle pour la première et petite pour la seconde, on constate que la différence $z - I$ est un infiniment petit dont la partie principale est $-\frac{A_{02}\varepsilon}{v'(I)}$. Aussi doit-on s'attendre à supprimer le terme $A_{02}\varepsilon\xi_2$ en inclinant l'écran ; c'est bien ce que montre la formule (195) qui permet de calculer l'angle Φ correspondant par :

$$(214) \quad \operatorname{tg} \Phi = -\frac{\varphi_1 v'}{A_{02}}.$$

D'après la formule (183) l'angle Φ dépend de la position du diaphragme, si A_{22} n'est pas nul.

On pourrait interpréter par des considérations analogues les coefficients A_{01} , C_{01} , etc. ; nous ne le ferons pas parce que cela présente moins d'intérêt pour la spectrographie. Les termes les plus intéressants pour celle-ci sont A_{22} , A_{02} ,

⁽¹⁾ W. BARTKY et A. DEMPSTER, *Phys. Rev.*, **27** (1926), 739.

A_{00} . On cherchera à annuler A_{22} , puis à supprimer A_{02} par une inclinaison convenable de la plaque, pour ne pas limiter par trop les valeurs de ε compatibles avec une finesse de raie déterminée. Si on est maître du choix de la position du diaphragme il semble indiqué d'en profiter pour diminuer A_{00} .

Jusqu'ici on a prêté peu d'attention aux termes en E_{ik} (¹). Ces termes doivent être considérés, si on cherche à augmenter l'intensité des raies en augmentant la dimension de la source et du diaphragme, dans le sens perpendiculaire au plan de symétrie. En effet, prenons pour objet une fente fine ($\xi_1 = 0$). La trajectoire passant par le point ξ_2, η_2 du diaphragme arrive sur l'écran en un point situé dans le plan de symétrie ($\eta_1 = 0$), si, au second ordre près :

$$\eta_1 = -\rho_1 \eta_2.$$

Mais, pour cette trajectoire :

$$(215) \quad \xi_1 = \frac{1}{2} [A_{22} \xi_2^2 + (\rho_1^2 E_{41} - 2\rho_1 E_{42} + E_{22}) \eta_2^2].$$

Si $2\xi_2, 2\eta_2$ sont les dimensions d'un diaphragme rectangulaire, si la source émet uniformément sur une longueur :

$$(216) \quad 2\eta_1 > 2|\rho_1| \eta_2,$$

la largeur de l'image en son milieu sera :

$$\frac{1}{2} \left| A_{22} \left| \xi_2^2 + \frac{1}{2} \left| \rho_1^2 E_{41} - 2\rho_1 E_{42} + E_{22} \right| \eta_2^2 \right. \right|.$$

Par ailleurs, si (216) est vérifié, l'intensité sera proportionnelle à la surface $4\xi_2\eta_2$ du diaphragme, et, pour un dia-

(¹) Les aberrations de trajectoires non situées dans le plan de symétrie n'ont été étudiées que dans un cas très particulier par Wooster et Li. W. A. WOOSTER. *Proc. Roy. Soc., A*, **114** (1927), 729; K. T. LI. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **33** (1937), 164.

phragme de surface donnée, la raie aura la finesse maximum, si :

$$(217) \quad \frac{\xi_2^2}{\eta_2^2} = \left| \frac{\rho_1^2 E_{11} - 2\rho_1 E_{12} + E_{22}}{A_{22}} \right|.$$

La formule (217) reste valable si $\rho_1 = 0$, c'est-à-dire si le montage est stigmatique.

V. — Approximation de Gauss pour les systèmes centres de l'optique électronique.

Dans les systèmes centrés, le champ électrique et le champ magnétique sont créés par des arrangements de conducteurs et d'aimants possédant une symétrie de révolution autour d'une droite. Cette droite est en même temps la trajectoire moyenne, et nous la prendrons pour axe des z d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $Oxyz$. Nous supposerons qu'elle est parcourue dans un sens bien déterminé ; nulle part les particules ne seront réfléchies et ne rebrousse-
ront chemin. Le champ électrique et le champ magnétique sont complètement déterminés en tout point quand on connaît leur valeur le long de l'axe, et la distribution spatiale de la charge électrique. On en trouvera les expressions générales dans le livre de Brüche et Scherzer ⁽¹⁾, et dans un mémoire de Glaser ⁽²⁾.

Il nous suffira ici de remarquer qu'en tout point le champ magnétique doit être dans le plan méridien, et que le potentiel électrique dépend seulement de z et de la distance r à l'axe, et doit être une fonction paire de x et de y . Dans notre système cartésien où $\theta = \omega = 0$, nous avons :

$$(218) \quad b_1 = b_2 = b_{12} = h_0 = k_0 = h_2 = k_1 = 0$$

$$(219) \quad b_{11} = b_{22} \quad h_1 = k_2$$

⁽¹⁾ BRÜCHE et SCHERZER. *Geometrische Elektronenoptik*, 60 et 77.

⁽²⁾ GLASER. *Z. Physik*, 81 (1933), 647.

Les relations (154) et (39) nous donnent alors :

$$(220) \quad h_1 = k_2 = -\frac{1}{2} l'_0, \quad b_{11} = b_{22} = -\frac{1}{2} (V''_0 + 4\pi\rho_0 c^2).$$

Maintenant l_0 est identique au champ magnétique au point o, o, z de l'axe. Nous poserons :

$$(221) \quad l_0 = H.$$

Les équations (60) deviennent :

$$(222) \quad \begin{cases} \frac{d}{dz} (nx' - eHy) = a_{11}x - \frac{1}{2} eH'y \\ \frac{d}{dz} (ny' + eHx) = \frac{1}{2} eH'x + a_{11}y \end{cases}$$

en tenant compte que :

$$d_1 = a_1 = d_2 = a_2 = d_{12} = a_{12} = 0$$

et :

$$d_{11} = d_{22} = a_{11} = a_{22}.$$

Passons des coordonnées, x, y aux coordonnées, X, Y définies par (65), où :

$$(223) \quad \alpha(z) = \int_a^z -\frac{eH}{2n} dz$$

Nous trouvons :

$$(224) \quad \begin{cases} \frac{d}{dz} nX' = \frac{X}{2n} \Omega(z) \\ \frac{d}{dz} nY' = \frac{Y}{2n} \Omega(z) \end{cases}$$

avec :

$$(225) \quad \begin{cases} \Omega(z) = 2na_{11} - \frac{e^2}{2} H^2 \\ \quad \quad \quad = e(V''_0 + 4\pi c^2 \rho_0) \left(m + \frac{E - eV_0}{c^2} \right) - \frac{1}{2} e^2 H^2 \end{cases}$$

formules équivalentes aux formules données par W. Glaser (¹).

(¹) W. GLASER. *Z. Physik*, **81** (1933), 647.

La quantité $E - eV_0$ est toujours positive; en désignant par ε la valeur absolue de la charge du corpuscule, on peut poser :

$$(226) \quad \varepsilon \Phi(z) = E - eV_0,$$

$\Phi(z)$ représente la valeur absolue du potentiel, si on choisit le zéro des potentiels en un point où la vitesse des particules est susceptible de s'annuler. A l'approximation non relativiste les équations (224), (225) sont équivalentes à :

$$(227) \quad \begin{cases} \sqrt{\Phi} \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} \frac{dX}{dz} = \left(-\frac{\Phi''}{4} + \pi c^2 \rho \frac{e}{\varepsilon} - \frac{H^2}{8m} \right) X \\ \sqrt{\Phi} \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} \frac{dY}{dz} = \left(-\frac{\Phi''}{4} + \pi c^2 \rho \frac{e}{\varepsilon} - \frac{H^2}{8m} \right) Y \end{cases}$$

formules données par Scherzer⁽¹⁾ et de manière commode.

Pour relier $x(z)$, $y(z)$, $x'(z)$, $y'(z)$ aux valeurs x_a , y_a , x'_a , y'_a que ces quantités possèdent au point $z = a$, il est avantageux d'utiliser les combinaisons intermédiaires :

$$(228) \quad \begin{cases} p(z) = n(z)x'(z) - \frac{1}{2} H(z)y(z) \\ q(z) = n(z)y'(z) + \frac{1}{2} H(z)x(z) \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{l} p_a = n_a x'_a - \frac{1}{2} H_a y_a \\ q_a = n_a y'_a + \frac{1}{2} H_a x_a \end{array} \right.$$

Soient $u(z)$ et $v(z)$ les solutions d'une équation (224) définies par :

$$u(a) = 1 \quad v(a) = 0 \quad u'(a) = 0 \quad v'(a) = \frac{1}{n_a}.$$

Un calcul simple montre que :

$$(229) \quad \begin{vmatrix} x(z) \\ y(z) \\ p(z) \\ q(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \cos \alpha & -u \sin \alpha & v \cos \alpha & -v \sin \alpha \\ u \sin \alpha & u \cos \alpha & v \sin \alpha & v \cos \alpha \\ nu' \cos \alpha & -nu' \sin \alpha & nv' \cos \alpha & -nv' \sin \alpha \\ nu' \sin \alpha & nu' \cos \alpha & nv' \sin \alpha & nv' \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_a \\ y_a \\ p_a \\ q_a \end{vmatrix}$$

(1) BRÜCHE et SCHERZER. *Geometrische Elektronenoptik*, 114.

En posant :

$$(230) \quad \begin{cases} x(z) + iy(z) = \xi(z) \\ p(z) + iq(z) = \pi(z) \end{cases} \quad \text{avec : } i = \sqrt{-1},$$

cette équation peut se condenser en :

$$(231) \quad \begin{vmatrix} \xi(z) \\ \pi(z) \end{vmatrix} = e^{i\alpha} \begin{vmatrix} u & v \\ nu' & nv' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_a \\ \pi_a \end{vmatrix}.$$

Les quantités $p(z)$ et $q(z)$ ont une signification simple : ce sont les moments conjugués de x et y , par rapport à la fonction de Lagrange, lorsqu'on adopte un potentiel vecteur qui possède la symétrie de révolution autour de l'axe z .

Si la fonction $v(z)$ s'annule pour $z = b$, les équations (228) à (231) montrent que $x(b)$ et $y(b)$ ne dépendent pas de x'_a et y'_a mais seulement de x_a et y_a . Dans le plan $z = b$ nous avons l'image d'une source de corpuscules placée dans le plan $z = a$; le grandissement est donnée par $u(b)$. Le champ magnétique introduit la particularité d'un décalage par rotation d'axe Oz entre l'objet et l'image. Si le champ magnétique est nul dans les régions où se trouvent l'objet et l'image, la rotation sera indépendante de leur position; elle ne dépendra que du champ magnétique dans la région intermédiaire. Si le champ électrique et le champ magnétique sont nuls dans les régions où se trouvent l'objet et l'image, on pourra définir des foyers et des plans principaux et appliquer les relations bien connues de l'homographie optique.

On peut effectuer sur chacune des équations (224) une transformation souvent utile indiquée par Picht et Glaser ⁽¹⁾.

Posons :

$$(232) \quad X(z) = R(z)n^{-\frac{1}{2}}$$

(1) PICHT. *Ann. der Phys.*, 15 (1932), 926; GLASER. *Z. Physik*, 81 (1933), 647.

d'où :

$$(233) \quad nX'(z) = -\frac{1}{2} Rn^{-\frac{1}{2}} n' + R'n^{\frac{1}{2}}$$

$R(z)$ obéit à l'équation :

$$(234) \quad \frac{d^2 R}{dz^2} + \tau(z)R = 0$$

avec ⁽¹⁾ :

$$(235) \quad \tau(z) = \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n^2} - \frac{e^2 V_0'^2}{2c^2 n^2} + \frac{e^2 H^2}{4n^2} - \frac{2\pi c^2 \rho_0 e}{n^2} \left(m + \frac{E - eV_0}{c^2} \right)$$

ou encore :

$$(236) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau(z) &= \frac{3}{16} \frac{e^2 V_0'^2}{(E - eV_0)^2} \frac{1 + \frac{2}{3}s + \frac{s^2}{3}}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)^2} \\ &+ \frac{e^2 H^2}{8m(E - eV_0)\left(1 + \frac{s}{2}\right)} - \frac{\pi c^2 \rho_0 e(1 + s)}{(E - eV_0)\left(1 + \frac{s}{2}\right)} \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(237) \quad \frac{E - eV_0}{mc^2} = s$$

s représente le rapport de l'énergie cinétique du corpuscule à son énergie au repos. Cette formule se simplifie à l'approximation non relativiste ($s = 0$), et par le choix d'une origine de potentiel telle que $E = 0$.

L'avantage principal de la transformation (232) est qu'elle fait disparaître V_0'' et n'' des équations de la trajectoire.

Les formules (234) et (235) appellent quelques remarques. Dans le cas où $\rho_0 e$ est nul ou négatif, $\tau(z)$ est toujours positif, puisque s est positif. Considérons le cas de deux milieux homogènes, c'est-à-dire où les champs sont nuls, séparés par un milieu non homogène. A des trajectoires parallèles dans le premier milieu correspond la donnée initiale :

$$R = \text{const.} \quad \frac{dR}{dz} = 0.$$

⁽¹⁾ Cette formule a été donnée par W. GLASER. *Zeits. f. Phys.*, **81** (1933), 647, avec une faute de signe.

Il résulte de (234) : ou bien R s'annulera dans la traversée du milieu intermédiaire, ou bien à la sortie, $\frac{dR}{dz}$ aura un signe contraire à R ; or les zéros de R entraînent ceux de X , et dans un milieu homogène, le signe de $\frac{dR}{dz}$ entraîne celui de $\frac{dX}{dz}$. Si on suppose le milieu final homogène et illimité, et le milieu initial homogène, des rayons incidents parallèles se couperont effectivement en au moins un foyer, que l'on pourra trouver dans le milieu intermédiaire ou dans le milieu final. C'est ce que l'on exprime quelquefois en disant, de façon incorrecte, mais imagée, que les systèmes centrés de l'optique électronique sont convergents.

D'autre part, si on différencie (235) par rapport à E , un calcul facile montre que :

$$(238) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial E} \left\{ \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n^2} - \frac{e^2 V_0'^2}{2c^2 n^2} \right\} \leq 0 \\ \frac{\partial}{\partial E} \frac{e^2 H^2}{4n^2} \leq 0 \\ \frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{n^2} \left(m + \frac{E - e V_0}{c^2} \right) \leq 0 \end{array} \right.$$

Donc dans le cas où $\rho_0 e$ est ≤ 0 , $\frac{\partial \tau}{\partial E}$ est négatif, quel que soit z .

Considérons les deux fonctions $R_1(z)$ et $R_2(z)$ définies par les équations :

$$(239) \quad R_1'' + \tau_1(z)R_1 = 0$$

$$(240) \quad R_2'' + \tau_2(z)R_2 = 0$$

et les conditions initiales :

$$R_1(a) = R_2(a) = 0, \quad R_1'(a) = R_2'(a) = 1.$$

Multiplions (239) par R_2 , (240) par R_1 et formons la différence :

$$(241) \quad \frac{d}{dz} (R_2 R_1' - R_1 R_2') + (\tau_1 - \tau_2) R_1 R_2 = 0.$$

Supposons $\tau_1 < \tau_2$ quel que soit z , et intégrons cette relation entre deux racines consécutives a et b de $R_1(z)$:

$$(242) \quad R_2(b)R'_1(b) + \int_a^b (\tau_1 - \tau_2) R_1 R_2 dz = 0.$$

Comme $R'_1(b)$ est négatif, cette égalité est impossible si R_2 reste constamment positif entre a et b . Il faut donc que R_2 s'annule avant R_1 .

Puisque les zéros de $R(z)$ entraînent ceux de $x(z)$ et de $y(z)$ il résulte de là que des particules d'énergie différentes issues du même point de l'axe des z ne convergeront pas au même point ; les particules de grande énergie convergeront plus loin que celles d'énergie plus faible. Par analogie avec l'optique, on pourra dire que le système n'est pas achromatique. On voit que ces résultats, obtenus par Scherzer ⁽¹⁾ pour le cas non relativiste s'étendent sans difficulté aux grandes vitesses.

Les raisonnements ci-dessus ne sont plus valables s'il existe une densité de charge spatiale $\rho_0(z)$ dont le signe est le même que celui des corpuscules. On peut trouver alors des systèmes achromatiques ; étant donné la difficulté de réalisation pratique d'une densité spatiale stable, ces systèmes n'ont pas beaucoup d'intérêt.

Etude des systèmes d'épaisseur faible. — On peut utiliser la transformation (232) pour calculer la matrice qui lie les valeurs de $X(z)$, $Y(z)$, $nX'(z)$, $nY'(z)$ aux valeurs X_a , Y_a , $n_a X'_a$, $n_a Y'_a$. En effet, les valeurs de $R(z)$, $R'(z)$ sont données en fonction de $R(a)$, $R'(a)$ par :

$$(243) \quad \begin{vmatrix} R(z) \\ R'(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_a \\ R'_a \end{vmatrix}$$

où les m_{ij} peuvent être calculés à partir de (234) par la méthode des pages 28, 29, en remplaçant $f(z)$ par $\tau(z)$ et $n(z)$ par 1.

(1) O. SCHERZER. *Z. Physik*, **105** (1936), 593.

D'autre part, entre $X(z)$, $nX'(z)$, $R(z)$ et $R'(z)$ nous avons les relations (232) (233) ainsi que :

$$(244) \quad \begin{cases} R(z) = X\sqrt{n} \\ R'(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot nX' + \frac{1}{2} \frac{n'}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

d'où :

$$(245) \quad \begin{vmatrix} X \\ nX' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ -\frac{n'}{2\sqrt{n}} & \sqrt{n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{n_a} & 0 \\ \frac{n'_a}{2\sqrt{n_a}} & \frac{1}{\sqrt{n_a}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_a \\ n_a X'_a \end{vmatrix}$$

et une relation semblable entre Y , nY' , Y_a , $n_a Y'_a$.

En particulier si pour $z=a$ et $z=b$, n' est nul, cette équation se simplifie en :

$$(246) \quad \begin{vmatrix} X_b \\ X'_b \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{n_a}{n_b}} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_a \\ X'_a \end{vmatrix}$$

Supposons $\tau(z)$ important dans une région ab assez étroite et nul ainsi que sa dérivée première en a , b et à l'extérieur de ab . Si l'intervalle ab n'est pas trop grand, on peut d'après les inégalités (104) (105) se contenter du premier terme des séries $\rho_{2\nu}(z)$, $\rho_{2\nu+1}(z)$, $\sigma_{2\nu}(z)$, $\sigma_{2\nu+1}(z)$ c'est-à-dire prendre :

$$(247) \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b-a \\ -B & 1 \end{vmatrix}$$

en posant :

$$(248) \quad B = \int_a^b \tau dz.$$

On peut, à l'approximation considérée, regarder la matrice (247) comme le produit dans un ordre quelconque des matrices.

$$(249) \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{vmatrix} 1 & b-a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut donc remplacer le système réel, par un système infiniment mince caractérisé par la matrice M et placé en un point P que l'on peut choisir arbitrairement entre a et b . Une approximation meilleure, qui revient à tenir compte des termes ρ_2, σ_2 mais non de ρ_3 et σ_3 , consiste à prendre pour origine un point P , nécessairement entre a et b , tel que :

$$(250) \quad \int_a^b z \tau(z) dz = 0.$$

Prenons l'origine en P , cherchons la relation entre les paramètres $X(z_0), X'(z_0)$ d'une trajectoire au point z_0 dans le milieu a , et les paramètres $X(z_1), X'(z_1)$ de cette même trajectoire au point z_1 du milieu b . Cette relation s'obtient par un calcul analogue à celui de la page (25) et s'écrit :

$$(251) \quad \begin{vmatrix} X(z_1) \\ X'(z_1) \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{n_a}{n_b}} \begin{vmatrix} 1 - Bz_1 & -z_0 + (1 + Bz_0)z_1 \\ -B & 1 + Bz_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X(z_0) \\ X'(z_0) \end{vmatrix}$$

Elle montre que les points z_1 et z_0 sont conjugués si :

$$(252) \quad \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0} = \frac{1}{B}$$

mais le grandissement pour les points conjugués z_0, z_1 est :

$$(253) \quad \gamma = \sqrt{\frac{n_a}{n_b} \frac{z_1}{z_0}}.$$

La formule (252) est identique à la formule des points conjugués des lentilles minces, tandis que la formule (253) n'est pas la formule du grandissement d'une lentille mince si n_a diffère de n_b . C'est que, dans ce cas, du point de vue de l'homographie optique, le système n'est équivalent ni à une lentille mince, ni à un dioptré ; le système est équivalent à un système épais. L'abscisse du foyer image est $\frac{1}{B}$, celle du foyer objet $-\frac{1}{B}$; l'abscisse du plan principal objet est $\frac{1}{B} \left(\sqrt{\frac{n_a}{n_b}} - 1 \right)$, celle du plan principal

image $\frac{1}{B} \left(1 - \sqrt{\frac{n_b}{n_a}} \right)$. Ce système a la propriété curieuse d'avoir ses points de Bravais confondus avec l'origine.

Pour un système centré, les aberrations du second ordre sont identiquement nulles à cause de la symétrie ; les aberrations du troisième ordre ont été calculées par Scherzer et Glaser et ont fait depuis l'objet de quelques travaux ⁽¹⁾. Sur ce sujet ainsi que sur les miroirs électroniques ⁽²⁾, nous renvoyons aux mémoires originaux.

Du point de vue théorique se posent encore un certain nombre de questions pour lesquelles on ne possède que peu de résultats, par exemple la forme à donner aux électrodes, aux aimants ou aux conducteurs parcourus par des courants, pour réduire les aberrations. Sans nul doute, ces problèmes seront résolus d'ici quelques années, et l'optique électronique qui a déjà obtenu des résultats très remarquables, atteindra le haut degré de perfectionnement que possède actuellement la construction des instruments d'optique.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. Louis de Broglie, pour la confiance qu'il m'a accordée, pour ses encouragements et ses conseils qui m'ont été un précieux soutien au cours de ce travail.

⁽¹⁾ O. SCHERZER. *Z. Physik*, **101** (1936), 593 ; W. GLASER. *Z. Physik*, **97** (1935), 177 ; BUSCH et BRÜCHE. *Beitrage zur Elektronenoptik*, pp. 24 et 33 ; R. REBSCH et W. SCHNEIDER. *Z. Physik*, **107** (1937), 144 ; GRATSIAIOS, **107** (1937), 382 ; H. RIEDL. *Z. Physik*, **107** (1937), 210 ; R. REBSCH. *Ann. Physik*, **31** (1938), 554 ; M. VON ARDENNE. *Z. Physik*, **108** (1938), 338.

⁽²⁾ A. RECKNAGEL. *Z. techn. Physik*, **17** (1936), 643 ; *Z. Physik*, **104** (1937), 381 ; G. HOTTENROTH. *Ann. Physik*, **30** (1937), 689.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

L'émission secondaire.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 6 Avril 1938.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Ch. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,
G. ROUSSY.

